

# 行列模型におけるトポロジーの研究

2011年3月

平山 善子

## 概要

弦理論の非摂動的定式化の有力候補である IIB 行列模型において、この理論が統一理論であるためには、私達が住む 4 次元時空の世界を記述している標準模型を再現できなければならない。標準模型の重要な要素であるカイラル・フェルミオンを高次元の理論から実現する機構として、余剰次元空間に非自明なインデックスを導入することが考えられる。通常の場合の理論では非自明なインデックスはゲージ場配位のトポロジカル・チャージにより与えられるが、有限自由度の理論でこれを示すのは一般に困難だと思われていた。しかし、格子ゲージ理論ではギンスバーグ・ウィルソン関係式を用いてこの定式化に成功した。本論文では、これを有限自由度の行列模型および非可換幾何に応用し、特に、 $S_F^2$  や  $S_F^2 \times S_F^2$  などの非可換球面を考え、ゲージ場配位のトポロジカル・チャージを構成する。

# 目次

第 1 章	序論	3
1.1	統一理論と弦理論	3
1.2	IIB 行列模型	4
1.3	カイラル・フェルミオンの実現	5
第 2 章	ギンスバーグ・ウィルソン関係式とインデックス定理	8
2.1	格子ゲージ理論における発展	8
2.1.1	ダブリング問題	8
2.1.2	ギンスバーグ・ウィルソン関係式	9
2.2	行列模型への応用	10
2.2.1	一般的な定式化	10
第 3 章	非可換 2 次元球面 $S_F^2$ 上でのモノポール配位	12
3.1	非可換 2 次元球面 $S_F^2$ における定式化	12
3.1.1	非可換 2 次元球面 $S_F^2$	12
3.1.2	ディラック演算子の構成	13
3.2	モノポール配位における定式化	15
3.2.1	モノポール配位	15
3.2.2	インデックス定理と射影空間	16
3.2.3	トポロジカル・チャージの可換極限	17
3.2.4	ディラック演算子のスペクトル	18
3.2.5	カイラル・ゼロモード	23
3.2.6	非自明なトポロジカル・チャージのダイナミカルな生成	24
第 4 章	非可換 2 次元球面 $S_F^2$ 上での一般の配位への拡張	32
4.1	一般の配位における定式化	32
4.1.1	一般化	32
4.1.2	許容条件	34
4.1.3	トポロジカル・チャージの特性	35
4.2	ある具体的な配位に関する具体例	37
4.2.1	可換理論におけるトポロジカル・チャージ	37
4.2.2	非可換理論におけるトポロジカル・チャージ	39
第 5 章	非可換 $2 \times 2$ 次元球面 $S_F^2 \times S_F^2$ 上への拡張	44
5.1	ディラック演算子の構成とインデックス定理	44

5.2	トポロジカル・チャージの可換極限 . . . . .	46
5.3	カイラル・ゼロモード . . . . .	48
5.3.1	相互作用がない場合のカイラル・ゼロモード . . . . .	48
5.3.2	モノポール配位とカイラル・ゼロモード . . . . .	50
5.4	非可換 $2k$ 次元球面 $(S_F^2)^k$ への応用 . . . . .	53
5.5	修正した定式化による考察 . . . . .	56
第 6 章 結論と展望		58
付 録 A インデックス定理		60
付 録 B 1-ループ有効作用		62
付 録 C 電荷演算子の可換極限		63
付 録 D ディラック演算子とトポロジカル・チャージの可換極限		64
付 録 E カイラリティ演算子のゼロモードにおける分析		66
E.1	基底とユニタリー変換 . . . . .	66
E.2	$\hat{\Gamma}$ のゼロモードに関する計算 . . . . .	67
E.3	$\hat{\Gamma}'$ のゼロモードに関する計算 . . . . .	68
付 録 F ゲージ場による $\hat{\Gamma}$ の展開		71
付 録 G $Tr[G_5]$ の可換極限		73
付 録 H 相互作用がない場合のディラック演算子のスペクトル		76

# 第1章 序論

## 1.1 統一理論と弦理論

素粒子物理学とは、自然界の基本的な構成要素を特定し、それらが従う運動の法則およびそれらの間に働く相互作用に関する法則を探求する学問である。自然界を支配する基本的な原理や法則を解明し、物質・相互作用・時空間といったすべての自然現象を統合的・統一的に矛盾なく説明できる理論を構築することを目的としている。

現在、自然界には電磁相互作用・強い相互作用・弱い相互作用・重力相互作用の4つの基本的な相互作用が存在することが知られている。電磁相互作用は電荷を持つ粒子間に普遍的に働く力であり、その力も非常に強い。強い相互作用と弱い相互作用は20世紀の原子核物理学の発展において発見されたもので、力の到達距離が原子核のサイズにもおおよばないくらい極めて短いため、日常生活で感じることはほとんどないが私たちの存在に深く関係する力である。重力相互作用はミクロな物体においては完全に無視できるほど弱いですが、質量があるものすべてに平等に働き、地球や太陽のような天体に関してはその運動を完全に支配するほどに強い力となる。

この4つの相互作用を統一的に記述するための統一理論が、素粒子物理学における最重要課題の1つとされている。重力相互作用については、古典的には一般相対論で完全に記述されているが、その方程式を量子論に当てはめると、非常に小さいスケールでの場の揺らぎが繰り込みでは制御できないほど大きくなり、意味のある理論にはならないのである。一方で、重力相互作用を除く3つの相互作用に関してはゲージ場の量子論に基づく標準模型により統一的に記述され、 $10^2\text{GeV}$ 程度の非常に良い精度で実験値・観測値と一致している。この標準模型は20世紀の素粒子物理学における最大の成果だといっても過言ではないが、次に示す問題点により、いまだ不完全な理論だといえる。

1つ目に、この理論は任意性が高すぎる。クォーク・レプトンがそれぞれ6種類ずつ存在するのに加えて、光子、ゲージボソンなど素粒子と呼ぶには多すぎるような数の粒子が基本的な粒子として扱われている。また、それらの粒子の質量、小林・益川行列、結合定数など約20の任意パラメータが存在し、なぜ時空次元は4次元なのか？なぜ物質の世代数は3世代なのか？なぜゲージ群は $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ なのか？などの問いに、答えることができないのが現状である。

2つ目は、量子重力を含んでいないという点である。では、なぜ量子重力が必要なのか？なぜ、プランクスケール( $10^{19}\text{GeV}$ )の現象を考える必要があるのか？まず第一に、 $SU(3)$ 、 $SU(2)$ 、 $U(1)$ の各ゲージ群の結合定数は $10^2\text{GeV}$ では異なる値を持つが、その値を高エネルギーへ外挿すると、エネルギースケールとともに変化し、プランクスケールに極めて近い $10^{16}\text{GeV}$ (GUTスケール)で統一されることが知られている。これにより、プランクスケール付近には重力まで含めた統一理論が存在するのではないかと期待されている。次

に、宇宙初期やブラックホールは非常に高温高密度であり、このような現象を考えるためには量子重力は不可欠なものとなる。さらに、一般相対論は時空の特異点を必ず含むためにそこでは理論が破綻するという特異点問題に関しても、量子化により特異点がぼやけることから重力の量子論ではこのような問題が生じないと考えられる。

現在、量子重力を含む統一理論の最有力候補が弦理論である。弦理論では、基本粒子は従来のような点粒子ではなく、1次元にひろがったプランクスケールの長さの弦だと考える。この理論では弦の振動モードにより種々の粒子を表しており、閉弦のゼロ質量モードはスピン2の粒子、グラビトンを意味している。このことは、弦理論が重力理論を自然に含んだ理論であることを示している。また、点粒子の理論では相互作用点が1点に決まっていることから紫外発散の問題に悩まされたが、弦理論では時間軸の取り方により変化するため相互作用点を特定できないことから、紫外発散が生じないという特長を持つ。さらに、弦理論は任意パラメータを持たないことも大きな利点の1つである。加えて、対称性から理論がほぼユニークに決定され、超対称性も考慮した超弦理論において、摂動論の範囲では平坦10次元時空でタイプI、タイプIIA、タイプIIB、ヘテロSO(32)、ヘテロ $E_8 \times E_8$ の5つの真空が存在することが知られている。この10次元の理論はコンパクト化により低次元で無数の理論を作ることができる。摂動的に構成されるすべての弦理論は単一の理論の局所的な真空を記述しているだけであり、弦理論は本質的に1つのものであると予想されるが、摂動論の範疇ですべてが安定な個別の理論であり真の真空を決める手段を持たない。真の真空構造を調べるためには、弦理論の摂動によらない構成的な定式化が必要であり、これが弦理論が抱える最大の課題である。実際に非摂動的定式化が完成して予想通りに真空がただ1つに決められると、弦理論が正しければ、そこでは私達の住む4次元時空の標準模型を記述できるだろう。少なくとも原理的には、時空次元やゲージ群の構造、世代数などのあらゆる事象を説明できることになり、これらの計算結果が実験的に完全に認められれば、私達はまさしく「万物の理論」を手に入れたことになる。仮に真空が1つに決まらない場合でも、なぜ自然が標準模型で記述されているかを議論する出発点となる。何よりもまず、弦理論の非摂動的定式化を完成させなければならないのである。

## 1.2 IIB 行列模型

弦理論の非摂動的定式化として最も有力視されているのが行列模型である。この行列模型においてもいくつかの理論が提唱されており、ここではその中でも最も高い対称性を持つIIB行列模型について議論する。

IIB行列模型の作用は次式で与えられる [1] :

$$S_{\text{IIB}} = -\frac{1}{g^2} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{4} [A_\mu, A_\nu]^2 + \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu [A_\mu, \psi] \right\}. \quad (1.1)$$

$A_\mu$  と  $\psi$  は  $N \times N$  のエルミート行列であり、 $\mu$  は  $0 \sim 9$  までの値をとる。 $A_\mu$  は10次元ベクトル、 $\psi$  は10次元のマヨラナ・ワイルスピノルである。この理論の作用(1.1)は、シルトゲージでのIIB型グリーン・シュワルツ作用を行列正則化することにより得られる。このため、弦理論と対応していることが示される。また、この模型はIIB型の弦が持つべき10次元の $\mathcal{N} = 2$ の超対称性を持っている。このことは、理論が重力を含んでいることを

意味している。さらに、この理論において時空は初めから与えられるものではなく  $A_\mu$  の固有値の広がりとしてダイナミカルに生成されるものである。したがって、コンパクト化や時空の生成・消滅などの時空のダイナミクスを解析するのに非常に有効な理論となる。上記の特徴の他にも、IIB でのウィルソンループを弦の生成・消滅演算子とみなすと、IIB 超弦理論の光円錐ゲージにおける弦の場の理論を再現することを示すことができることなどからも、IIB 行列模型は超弦理論の構成的定式化になっていると考えられる。また、この模型は非可換幾何学 [2] と密接に関係する。現在、弦理論において B 場が背景に存在する場合に時空が非可換になることが知られており、D ブレイン上の有効理論は非可換時空におけるヤン・ミルズ理論になっている [3]。IIB 行列模型においても、古典解の周りで展開することにより非可換ヤン・ミルズ理論になることが示されている [4]。その上、 $U(N)$  と  $SO(10)$ 、タイプ IIB 型の超対称性という非常に高い対称性を持ち、非常にシンプルで任意パラメータを持たないということからも、この理論がこの自然界を記述する最も基本的な理論にふさわしいと期待される。

一方で、IIB 行列模型にはいくつかの課題が存在する。IIB 行列模型には、行列の中に時空や物質、相互作用が渾然一体に埋め込まれている。究極の理論としてはふさわしい性質ではあるが、何がどのように埋め込まれているかを明確にする必要がある。計量やトポロジー、コンパクト化、背景場非依存性などの重要な概念が行列模型でどのように実現されるかを明らかにしなければならない。また、最も基本的な理論として考えるならば、この IIB 行列模型から私達が住む 4 次元時空での自然現象を説明できなければ意味がない。すなわち、この理論の低エネルギーの有効理論として標準模型を再現する必要がある。4 という時空次元や  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  のゲージ群を導き、標準模型の重要な要素であるカイラル・フェルミオンを実現できなければならない。この IIB 行列模型から 4 次元時空でのカイラル・フェルミオンを実現させることこそが、本論文の主な目的である。

### 1.3 カイラル・フェルミオンの実現

前述したように、IIB 行列模型が記述する空間は 10 次元である。IIB 行列模型から 4 次元時空でのカイラル・フェルミオンを実現させるには、この 10 次元が何らかのメカニズムで私達の住む 4 次元時空にコンパクト化され、そのコンパクト化された世界でカイラルな理論が得られなければならない。様々な研究グループにより IIB 行列模型から 4 次元時空が好まれそうだということは示されてきたが<sup>1</sup>、コンパクト化が実際にどのように行われるかについてはいまだ解明されていない。そこで、この余剰次元空間のトポロジーに注目して、余剰次元空間に非自明なインデックスを持たせることにより 4 次元でのカイラル・フェルミオンを実現するという以下のような手法を考える。

(1.1) からわかるように、10 次元のフェルミオン作用は  $-\frac{1}{g^2} \text{Tr}(-\frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu [A_\mu, \psi])$  で得られる。添え字  $\mu$  は 0 ~ 9 までの値をとるが、次のようにディラック演算子を 4 次元部分  $\gamma^a D_a$  ( $a = 0 \sim 3$ ) と 6 次元部分  $\gamma^i D_i$  ( $a = 0 \sim 6$ ) に分解すると、4 次元の有効作用におい

<sup>1</sup>IIB 行列模型におけるブランチドポリマー的な時空構造の研究や、改良された平均場近似を用いた 4 次元時空の解析など、時空の 4 次元性については様々な議論がなされている [5, 6, 7, 8]。

ては 6 次元部分のディラック演算子の固有値が 4 次元での質量  $m_4$  を与えると解釈できる：

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu D_\mu \psi &= (\gamma^a D_a + \gamma^i D_i), \\ &\rightarrow (\gamma^a D_a + m_4).\end{aligned}$$

したがって、4 次元時空でのカイラル・フェルミオンをダイナミカルに生成するためには、余剰次元空間に非自明なインデックスを実現させればよい。ここで、インデックスとはディラック演算子のゼロモードでカイラリティが正と負の状態数の差で定義される。

余剰次元空間は実際にはどのような空間でもよいが、弦理論において、6 次元の余剰次元空間はコンパクト化により小さく丸まると予想されている。もし、コンパクト空間のサイズがプランク・スケールよりも小さいならば、その座標は非可換になり、トポロジーの概念を非可換空間へ一般化する必要があるだろう。しかしながら、インデックス定理の非可換空間への一般化はほとんどが無限サイズの空間で形成され、以下のような理由から、有限自由度の系でトポロジカル・チャージを定義することは出来ないと広く信じられきた。

連続理論で知られているインデックス定理は、以下のようなものである：

$$n_+ - n_- = Tr[\gamma_5]. \quad (1.2)$$

これは、ディラック演算子の固有値がゼロでカイラリティが正と負の固有状態数の差が、カイラリティ演算子のトレースに等しいという定理である。一見するとこの右辺はゼロになるように見えるが、スピノル空間のトレースから出てくるゼロと関数空間のトレースから出てくる無限大をうまく定義してやることにより、 $Tr[\gamma_5]$  を有限の値に定義することができる。ここで重要なのは空間が無限自由度であるという点であるため、有限自由度の系では非自明な関係となる。

この状況は、格子ゲージ理論においても同様であった。格子ゲージ理論では理論は有限個の格子点上に定義され、全自由度は有限である。この理論にはダブリング問題により生じる、いかにカイラル対称性とインデックス定理を正確に定義するかという問題が存在していた。この問題は、ギンスパーグ・ウィルソン (GW) 関係式を満たすディラック演算子の導入により、見事に解決された [9, 10]。許容条件により格子のゲージ場にトポロジカルな構造が与えられ、すべてが連続につながっていたゲージ場の配位空間がトポロジカル・チャージによって特徴づけられる個々の領域、すなわち、トポロジカル・セクターに分類できることが示された [11, 12, 13]。私達はこのような格子ゲージ理論での発展を非可換空間に応用し、トイモデルとして非可換 2 次元球面  $S_F^2$  を考えることから出発し、GW 関係式を用いて余剰次元空間でインデックス定理を定義し、その定式化をもとに非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  への一般化を行う。

まず非可換 2 次元球面  $S_F^2$  において、[14] では、GW 関係式を行列模型に応用し、有限な任意の非可換多様体上で、一般のゲージ場と結合した形でインデックスを明白に与えるディラック演算子  $D_{GW}$  を構成している。さらに、[15] では、トポロジカルに非自明な配位としてトーフト・ポリヤコフ (TP) モノポール配位が構成された。ここではある種の射影演算子を導入することにより、TP モノポール背景場におけるインデックス定理を定義している [16]。TP モノポール配位においてこうして得られたトポロジカル・チャージの可換極限は、可換理論でよく知られている値と一致することが示された。その上、[17] では、3 次元ヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型において、インデックスがダイナミカルに実現されるメカニズムを示している。



[18] では、この定式化をモノポール配位のような特殊な配位のみではなく、運動方程式を満たさないような一般の配位にまで拡張して定式化を行っている。これにより、配位空間全体について議論することが可能となり、その上で可換理論と非可換理論の対応をより明確に確認することができた。まず私達は、拡張した定式化により得られたトポロジカル・チャージが、可換極限においてトフフトによって導入された適当な形を持つことを示した。さらにトポロジカル・チャージの特性を調べ、その可換極限がスカラー場の巻き付き数になることを証明した。この形式化は  $U(2)$  ゲージ対称性が  $U(1) \times U(1)$  対称性に自発的に破れるような一般の配位に関して適用できるので、ゲージ場の配位空間をトポロジカル・セクターに分類することができる。そこで、格子ゲージ理論ので発展した許容条件を応用し、行列模型において配位空間を分類するための許容条件を考察した。その上、実際にある具体的な配位を考え、可換理論と非可換理論の両側でトポロジカル・チャージやディラック演算子を評価した。その非可換理論での結果は許容条件が満たされている領域では対応する可換理論に一致し、さらに許容条件が満たされないような領域についても調べることができた。

ここまで考えた非可換 2 次元球面  $S_F^2$  は、最も簡単なトイモデルである。 $S_F^2$  とは異なる空間次元、異なる非可換多様体において同様の結果が得られるかについては非自明な問題であったため、[19] ではこれまでの非可換 2 次元球面上の研究を拡張し、余剰次元空間に非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  を考えた。 $S_F^2 \times S_F^2$  上で GW ディラック演算子を構成することにより、GW 関係式が成り立つことからインデックス定理からトポロジカル・チャージが得られる<sup>2</sup>。このトポロジカル・チャージの可換極限が、 $S_F^2 \times S_F^2$  上の第 2 チャーン指標と第 1 チャーン指標の和になることを示した。また、ある特定のゲージ場配位を背景場とするディラック演算子のカイラル・ゼロモードを調べ、ディラック演算子のインデックスが予想と一致した値をとることを示した。さらには、余剰次元空間で非自明なインデックスを構成するこの定式化を、非可換  $2k$  次元球面  $(S_F^2)^k$  へ一般化している。

以上のことをふまえて、以下で本論文の構成を説明する。第 2 章では、格子ゲージ理論における近年の発展と課題を説明し、その文脈で提唱された GW 関係式を一般の行列模型へ応用する。続く第 3 章では、余剰次元空間に非可換 2 次元球面  $S_F^2$  を考え、非自明なトポロジカル・チャージを持つ配位であるモノポール配位を構成し、その背景場において明白なインデックスを実現するディラック演算子を構成している。第 4 章では、第 3 章の定式化をモノポール配位のような特殊な配位のみではなく、その定式化を運動方程式を満たさないような一般の配位にまで拡張し、ここでも明白なインデックスが実現されることを示す。第 5 章では、余剰次元を 2 次元から 4 次元へ拡張し、非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  上でディラック演算子を構成し、インデックス定理によりそのトポロジカル・チャージを考える。最後に、第 6 章ではまとめと今後の展望を述べる。

<sup>2</sup>[20] では、非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  上で GW 関係式を用いずにディラック演算子を構成している。また、非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  上のゲージ理論のダイナミクスは [21] で研究されている。

## 第2章 ギンスパーク・ウィルソン関係式とインデックス定理

### 2.1 格子ゲージ理論における発展

格子ゲージ理論はクォークの閉じ込めを理解する枠組みとして、1974年にウィルソンにより提唱された [22]。連続時空上で場を量子化する通常の場合の理論に対し、格子理論では時空を間隔  $a$  の格子状に離散化して考える。この時空の最小間隔  $a$  がカットオフを与えるため、格子化という手法そのものが一種の正則化として働くことになる。また、経路積分においても、離散化されていることにより積分速度が数学的に正確に定義できる。これらの点により、格子ゲージ理論は非摂動的な定式化として広く認識されている。摂動展開に依らない定式化であり、連続極限をとる前はすべての計算が数学的に明確に定義できるため、コンピュータを用いた数値計算が可能である点もこの理論の大きな特徴といえる。1980年にクロイツがウィルソンの考えに基づいて最初のシミュレーションを行い、クォークの閉じ込めが実際に起こっていることを示して以来、強結合領域の物理を扱う量子色力学 (QCD) の実用的な計算手法として急速な発展をとげた。

格子ゲージ理論の近年の大きな発展の1つとして、格子カイラル・フェルミオンの発見が挙げられる。以下に続く副節では、格子上でフェルミオンを記述する際に問題となるダブラーに関して説明し、ダブリング問題の回避方法として提唱されているいくつかの格子フェルミオンを紹介する。

#### 2.1.1 ダブリング問題

格子ゲージ理論における重要な課題の1つとして、フェルミオンのダブリング問題が知られている。

伝搬関数を計算すると、その非積分関数の特異点から粒子の存在が判断できる。格子上のフェルミオンの伝搬関数は

$$\langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i\gamma^\mu \tilde{p}_\mu - M}{\tilde{p}^2 + M^2} e^{ip(x-y)} \quad (2.1)$$

のように求められ、ここで  $\tilde{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin(p_\mu a)$  である。伝搬関数の極の位置が粒子であると考えられるので、この伝搬関数の分母に注目する。質量0の粒子を格子にのせると考えると、 $a \rightarrow 0$ の連続極限で  $p_\mu a = \pm\pi$  となる運動量を持ったモードが、 $p_\mu a = 0$ と同様に寄与する。これは連続理論には存在せず、格子化により初めて現れるモードであり、この余分な自由度のことをダブラーと呼んでいる。

格子理論を実際の物理系に適用するには、ダブラーがなく1つのフェルミオン粒子を記述する格子フェルミオンの定式化が必要である。ところが、単純に格子化するだけでは、このように格子フェルミオンに余分な自由度が出現してしまうというこの厄介な問題はダブリング問題と呼ばれ、多くの研究が行われている。

ダブラーのない格子フェルミオンの定式化が容易ではないことは、ニールセン・二宮の定理からわかるだろう。これは、格子フェルミオン作用が

- 平行移動不変性
- カイラル対称性
- エルミート性
- フェルミ場の双一次形式
- 局所性

の仮定すべてを満たす場合、ダブラーが必ず存在することを証明している [23, 24]。つまり、この定理により、ダブラーの回避とカイラル対称性を同時に実現することができないことが示されたのである。

ダブラーのない格子フェルミオンの定式化については、現在までに様々な打開策が検討されている。ウィルソン・フェルミオンでは、格子フェルミオン作用  $S_F$  に  $a$  の高次の項を加えて、 $p_\mu a = \pm\pi$  のモードが出ないようにしている。

$$S_F^{(W)} = S_F - \frac{r}{2} \sum_n \bar{\psi}(n) \sum_n (\phi(n + \hat{\mu}) + \phi(n - \hat{\mu}) - 2\phi(n)) \psi(n). \quad (2.2)$$

この右辺第2項はウィルソン項と呼び、 $r$  はウィルソン・パラメータと呼ばれている。ウィルソン項は連続理論  $a \rightarrow 0$  で  $a$  に比例して0になる。このウィルソン項の存在により、求めたい物理的な粒子の質量はそのまま、ダブラーには大きな質量を与えることで、低エネルギーの物理現象にダブラーが効いてこないようにする手法である。その他のダブリング問題の解決策の1つとして、スタaggerド・フェルミオン (KS フェルミオン) の定式化がある。この定式化ではダブラーを理論から排除するのではなく、その自由度をフレーバーだと解釈するのが特徴である。

上記以外の定式化の1つとして、ルッシャー・フェルミオンがある。これは、格子上のカイラル対称性を修正して、ディラック演算子とカイラリティ演算子の反交換関係に、格子間隔  $a$  に比例する補正項をつけるものである。次節では、この関係式の詳細について記述する。

### 2.1.2 ギンスパーグ・ウィルソン関係式

有限自由度の格子ゲージ理論において、カイラル構造を理解する方法としてギンスパーグ・ウィルソン (GW) 関係式が考案された [9]。

通常、可換理論の作用  $S_F = \bar{\psi} D \psi$  に関して

$$D\gamma + \gamma D = 0 \quad (2.3)$$

のように、ディラック演算子  $D$  とカイラリティ演算子  $\gamma$  が反可換であれば、理論がカイラル対称性を持つといえる。これを格子上で考えると、ニールセン・二宮の定理から次式のようにになると推測される。

$$D\gamma + \gamma D = \mathcal{O}(a) . \quad (2.4)$$

ギンスパーグとウィルソンはカイラル対称性を持つフェルミオン作用に、カイラル不変でない繰り込み群変換を行い、得られたフェルミオン作用の満たすべき条件を考察した。それが、この GW 関係式と呼ばれる条件である：

$$D\Gamma_{n+1} + \Gamma_{n+1}D = aD\Gamma_{n+1}D . \quad (2.5)$$

ここで  $D$  は  $n$  次元格子上的ディラック演算子、 $\Gamma_{n+1}$  は  $n$  次元格子上的カイラリティ演算子、そして  $a$  は格子間隔を意味する。この修正したカイラル対称性は連続極限  $a \rightarrow 0$  で、元のカイラル対称性と一致する。カイラル対称性の定義が変更されているため、ニールセン・二宮の定理に抵触することもない。

この GW 関係式 (2.5) は非線形であるため、局所性を満たす具体的な解はなかなか見つからなかったが、カプランやノイバーガー、ルツシャーらのそれぞれの貢献により、GW 関係式を満たすディラック演算子が次々と発見された [25, 26, 27]。

本論文では、格子理論から行列模型への応用としてこの GW 関係式を使用しており、その際には (2.5) の右辺を左辺に吸収させた

$$D\Gamma_{n+1} + \Gamma'_{n+1}D = 0 \quad (2.6)$$

を使用している。

## 2.2 行列模型への応用

この節では、前節の格子ゲージ理論において発展したカイラル構造を探るアイデアを行列模型に適用する。

### 2.2.1 一般的な定式化

まず、 $N \times N$  行列で構成された系を考える。 $1/N$  は格子ゲージ理論における格子間隔  $a$  に対応するものである。この行列サイズ  $N$  が無限大になる極限をとることにより、可換極限のカイラリティ演算子  $\gamma$  やディラック演算子  $D$  を得ることができるとする。

今、2つのカイラリティ演算子  $\Gamma, \hat{\Gamma}$  とディラック演算子  $D$  を考える。これらは  $N \times N$  行列に作用する演算子である。一般に、ディラック演算子  $D$  は背景にあるゲージ場の配位に依存する。2つのカイラリティ演算子は、可換極限をとることにより前述したカイラリティ演算子  $\gamma$  になることを要請し、以下の関係を満たすものとする。

$$\Gamma^2 = \hat{\Gamma}^2 = 1, \quad \Gamma^\dagger = \Gamma, \quad \hat{\Gamma}^\dagger = \hat{\Gamma} . \quad (2.7)$$

ここで、 $\Gamma$  はゲージ場に依存しないとする。もしこの系が可換極限でカイラル・アノマリーを持つならば、可換極限での結果と矛盾するため、ディラック演算子  $D$  はカイラリティ演

算子  $\Gamma$  と反交換関係にあると考えることができない。したがって、有限自由度の非可換幾何においてはこの代数構造が崩壊するため、単純なカイラリティ演算子のみではインデックス定理を証明することは出来ない。そこで、あるエルミート演算子  $H$  を用いてもう一つのカイラリティ演算子  $\hat{\Gamma}$  を構成する。

$$\hat{\Gamma} = \frac{H}{\sqrt{H^2}}, \quad H^\dagger = H. \quad (2.8)$$

このカイラリティ演算子  $\hat{\Gamma}$  は  $H$  を通してゲージ場に依存している。適当な  $H$  を選ぶことにより、GW 関係式を満たすディラック演算子  $D_{\text{GW}}$  を

$$1 - \Gamma\hat{\Gamma} = f(a, \Gamma)D_{\text{GW}} \quad (2.9)$$

のように定義することができる。  $f$  は微小パラメータ  $a$  とカイラリティ演算子  $\Gamma$  の関数である。関数  $f$  やエルミート演算子  $H$  はディラック演算子  $D_{\text{GW}}$  が  $a \rightarrow 0$  の極限で可換理論のディラック演算子になるという要請により決定することができる。(2.7) と (2.9) から GW 関係式

$$\Gamma D_{\text{GW}} + D_{\text{GW}}\hat{\Gamma} = 0 \quad (2.10)$$

を得ることができ、それにより以下のインデックス定理を示すことが出来る。

$$\text{index } D_{\text{GW}} \equiv n_+ - n_- = \mathcal{T}r \left[ \Gamma + \hat{\Gamma} \right]. \quad (2.11)$$

ただし、 $\mathcal{T}r$  は行列に作用する演算子のトレースであり、 $n_\pm$  は  $D_{\text{GW}}$  の固有値がゼロの  $\Gamma$  か  $\hat{\Gamma}$  に対するカイラリティが正（または負）の固有状態の数を表す。付録 B では、このインデックス定理 (2.11) の詳しい証明を記述する。

# 第3章 非可換2次元球面 $S_F^2$ 上でのモノポール配位

## 3.1 非可換2次元球面 $S_F^2$ における定式化

この節では、まず始めに非可換非可換2次元球面  $S_F^2$  について説明し、 $S_F^2$  上でのディラック演算子とその特徴について説明する。

### 3.1.1 非可換2次元球面 $S_F^2$

非可換2次元球面  $S_F^2$  の非可換座標は、非可換パラメータの  $\mu$  と  $SU(2)$  代数の  $n$  次元既約表現行列  $L_i$  を用いて、次のように表すことができる。

$$x_i = \mu L_i . \quad (3.1)$$

したがって、球面の半径  $\rho$  は

$$[x_i, x_j] = i\epsilon_{ijk} x_k , \quad (3.2)$$

$$(x_i)^2 = \mu^2 \frac{n^2 - 1}{4} \mathbf{1}_n = \rho^2 \mathbf{1}_n \quad (3.3)$$

という関係式より、

$$\rho = \mu \sqrt{\frac{n^2 - 1}{4}} \quad (3.4)$$

として表される。ここで、半径  $\rho$  を固定して  $\mu \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  の極限をとることにより可換極限をとることができる。

非可換2次元球面  $S_F^2$  の任意の波動関数は  $n \times n$  行列で表され、非可換球面調和関数  $\hat{Y}_{lm}$  により展開される。ただし、角運動量  $l$  の上限は  $n - 1$  で与えられる。2次元球面上の関数  $M(\Omega)$  のキリング・ベクトルに沿った微分  $\mathcal{L}_i$  は、非可換2次元球面  $S_F^2$  上においては、任意のエルミート行列  $\hat{M}$  に対して  $L_i$  の随伴演算子として作用する：

$$\mathcal{L}_i M(\Omega) = -i\epsilon_{ijk} x_j \partial_k M(\Omega) \leftrightarrow \tilde{L}_i \hat{M} = [L_i, \hat{M}] = (L_i - L_i^R) \hat{M} . \quad (3.5)$$

ここで、 $L_i$  の添字  $R$  は行列に対して右から作用する演算子であることを示す。また、球面上の積分については行列のトレースにより与えられる：

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} M(\Omega) \leftrightarrow \frac{1}{n} \text{Tr} [\hat{M}] . \quad (3.6)$$

### 3.1.2 ディラック演算子の構成

前節で述べた非可換 2 次元球面  $S_F^2$  において、次の 3 種類のディラック演算子が構成されている： $D_{\text{WW}}$ [28]， $D_{\text{GKP}}$ [29]， $D_{\text{GW}}$ [14]。各演算子の特徴を分類すると、表 3.1 のように表すことができる。

表 3.1: 各ディラック演算子の特徴

ディラック演算子	カイラル対称性	ダブラーフリー	インデックス	格子ゲージ理論との対応
$D_{\text{WW}}$		×	常にゼロ	素朴なフェルミオン
$D_{\text{GKP}}$	×		見にくい	ウィルソン・フェルミオン
$D_{\text{GW}}$			見やすい	GW フェルミオン

格子ゲージ理論での素朴なディラック演算子に対応する  $D_{\text{WW}}$  は明白なカイラル対称性を持つが、ダブラーが存在するためにカイラリティが正と負の状態数が等しくなってしまう、インデックスは常にゼロになる。 $D_{\text{GKP}}$  は格子ゲージ理論のウィルソンタイプのディラック演算子に対応し、ダブラーが存在しないように構成されているが、カイラル対称性を持たないためにインデックスが見にくい形になっている。また、格子ゲージ理論のギンスバーグ・ウィルソン・ディラック演算子に対応する  $D_{\text{GW}}$  は、GW 関係式を満たすように構成されており、ダブラーが存在しないためインデックスも見やすい。

以下では、まず  $D_{\text{GKP}}$  に関して簡単に説明し、その後に  $D_{\text{GW}}$  の構成法について述べる。

#### GKP ディラック演算子 $D_{\text{GKP}}$

$D_{\text{GKP}}$  のフェルミオン作用は

$$S_{\text{GKP}} = \text{Tr} [\bar{\Psi} D_{\text{GKP}} \Psi] , \quad (3.7)$$

$$D_{\text{GKP}} = \sigma_i (\tilde{L}_i + \rho a_i) + 1 \quad (3.8)$$

で与えられる。ここで、 $\sigma_i$  はパウリ行列で添字  $i$  は  $i = 1, 2, 3$  の値をとる。 $a_i$  は  $U(k)$  ゲージ群のゲージ場で、フェルミオン場  $\Psi$  はゲージ群の基本表現であり、それぞれ  $nk \times nk$  と  $nk \times n$  のエルミート行列である。ボゾンのな行列  $A_i$  は

$$A_i \equiv L_i + \rho a_i \quad (3.9)$$

のように共変座標として表され、

$$A_i \rightarrow U A_i U^\dagger \quad (3.10)$$

のように共变的に変換するため、作用 (3.7) はゲージ変換

$$\Psi \rightarrow U \Psi , \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} U^\dagger , \quad a_i \rightarrow U a_i U^\dagger + \frac{1}{\rho} (U L_i U^\dagger - L_i) \quad (3.11)$$

の下で不変である。

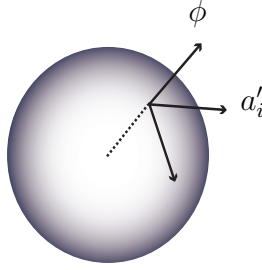


図 3.1: ゲージ場  $a_i$  の接線成分  $\phi$  と水平成分  $a'_i$ 。

可換極限において、ディラック演算子 (3.8) は

$$D_{\text{GKP}} \rightarrow D_{\text{com}} = \sigma_i(\mathcal{L}_i + \rho a_i) + 1 \quad (3.12)$$

となる。これは可換 2 次元球面上の通常のディラック演算子である。図 3.1 に示すように、3 次元空間のゲージ場  $a_i$  は接線成分  $\phi$  と水平成分  $a'_i$  に分解でき、それぞれの成分は以下のように示される。

$$\begin{cases} a'_i = \epsilon_{ijk} n_j a_k, \\ \phi = n_i a_i, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\Leftrightarrow a_i = -\epsilon_{ijk} n_j a'_k + n_i \phi. \quad (3.14)$$

ここで  $n_i = x_i/\rho$  は  $x_i$  方向の単位ベクトル、垂直成分  $\phi$  は 2 次元球面上のスカラー場である。したがって、このフェルミオンは湯川カップリングを通してスカラー場と結合している。

座標の非可換性により、ディラック演算子  $D_{\text{GKP}}$  はカイラリティ演算子と反交換しない。これを注意深く評価することにより、カイラル・アノマリーを正確に再現できる [30, 31, 32, 33]。しかしながら、この定式化ではカイラル構造が明白でないため、これらの問題を考えるのに適した別のディラック演算子を以下で定義する。

### GW ディラック演算子 $D_{\text{GW}}$

カイラル構造を議論するためには、GW 関係式を満たすディラック演算子が最適である。[14] では有限自由度の一般の非可換多様体上において、任意のゲージ場と結合した形の GW ディラック演算子  $D_{\text{GW}}$  を一般的に定式化している。

まず、2 つのカイラリティ演算子を以下のように定義する：

$$\Gamma = a \left( \sigma_i L_i^R - \frac{1}{2} \right), \quad (3.15)$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{H}{\sqrt{H^2}}. \quad (3.16)$$

ただし、

$$H = a \left( \sigma_i A_i + \frac{1}{2} \right) \quad (3.17)$$



で、 $A_i$  は (3.9) で定義したものであり、 $a = 2/n$  は格子理論における格子間隔に対応するものである。

これらのカイラリティ演算子は

$$(\Gamma)^\dagger = \Gamma, \quad (\hat{\Gamma})^\dagger = \hat{\Gamma}, \quad (\Gamma)^2 = (\hat{\Gamma})^2 = 1 \quad (3.18)$$

を満たす。また、 $\Gamma$  と  $\hat{\Gamma}$  の可換極限は両方とも可換 2 次元球面上のカイラリティ演算子  $\gamma$  になる： $\gamma = n_i \sigma_i$ 。

次に、GW ディラック演算子を次のように定義する：

$$D_{\text{GW}} = -a^{-1} \Gamma (1 - \Gamma \hat{\Gamma}) . \quad (3.19)$$

この定義により、GW 関係式

$$\Gamma D_{\text{GW}} + D_{\text{GW}} \hat{\Gamma} = 0 \quad (3.20)$$

が満たされるため、インデックス定理が成立する。作用

$$S_{\text{GW}} = \text{Tr} [\bar{\Psi} D_{\text{GW}} \Psi] \quad (3.21)$$

はゲージ変換 (3.11) の下で不変である。

可換極限において、GW ディラック演算子  $D_{\text{GW}}$  は

$$D_{\text{GW}} \rightarrow D'_{\text{com}} = \sigma_i (\mathcal{L}_i + \rho P_{ij} a_j) + 1 \quad (3.22)$$

となる。ただし、 $P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$  は球面上の接線方向の射影演算子である。つまり、このディラック演算子  $D'_{\text{com}}$  はスカラー場と結合していない可換な 2 次元球面上のディラック演算子になっている。これは、修正されたカイラル対称性である  $D_{\text{GW}}$  が GW 関係式を満たすという事実と一致する。

## 3.2 モノポール配位における定式化

この節では、トポロジカルに非自明な配位であるモノポール配位においてインデックス定理を定義し、トポロジカル・チャージを評価する。また、実際に GW ディラック演算子  $D_{\text{GW}}$  のスペクトルを求め、カイラル・ゼロモードが出現することを示す。さらに、そのカイラル・ゼロモードを数え上げることにより、計算から求められたトポロジカル・チャージの値と一致することを確認、カイラル・ゼロモードの具体形も求める。最後に、非可換 2 次元球面  $S_F^2$  を古典解として持つヤン・ミルズ・チャーン・サイモン模型を用いて、インデックスが自発生成する機構を示す。

### 3.2.1 モノポール配位

非可換 2 次元球面上の  $U(2)$  ゲージ理論において、非自明なトポロジカル・チャージを持つ配位として TP モノポール配位が構成された [15, 35]：

$$A_i = \begin{pmatrix} L_i^{n+m} & \\ & L_i^{n-m} \end{pmatrix} . \quad (3.23)$$

$A_i$  は (3.9) で定義されたものであり、 $L_i^{n \pm m}$  は  $SU(2)$  代数の  $n \pm m$  次元既約表現である。また、全体の行列サイズは  $N = 2n$  である。

$m = 0$  の場合は、ぴったりと重なった同じ半径の 2 つの非可換 2 次元球面に対応し、その有効作用は球面上の  $U(2)$  ゲージ理論になっている。一般の  $m$  の場合は半径の異なる 2 つの非可換 2 次元球面に対応する。また  $|m| \ll n$  はトポロジカル・チャージ  $-|m|$  のモノポール配位に相当し、この  $U(2)$  ゲージ対称性は自発的対称性の破れにより  $U(1) \times U(1)$  対称性に崩壊する。

$m = 1$  の場合、(3.23) はユニタリー変換により

$$UA_iU^\dagger = L_i^n \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_n \otimes \frac{\tau_i}{2} \quad (3.24)$$

と等価になる。(3.9) と比べることにより、ゲージ場

$$a_i = \frac{1}{\rho} \mathbf{1}_n \otimes \frac{\tau_i}{2} \quad (3.25)$$

が得られる。このゲージ場 (3.25) の可換極限をとり、球面の垂直成分と接線成分に分解すると、

$$a_i^a = \frac{1}{\rho} \epsilon_{ija} n_j, \quad (3.26)$$

$$\phi^a = \frac{1}{\rho} n_a \quad (3.27)$$

となり、これは可換理論で知られている TP モノポール配位そのものである [15]。

また、 $U(2)$  ゲージ対称性が  $U(1) \times U(1)$  対称性に自発的対称性の破れたときのトポロジカルに非自明な配位は

$$A_i = L_i + \frac{2}{n} L_i \tau_3 \quad (3.28)$$

である。実際に、この可換極限は  $a_i^a = 0, \phi^a = \delta_{a3}/\rho$  になる。

### 3.2.2 インデックス定理と射影空間

TP モノポール配位 (3.23) に関するインデックス定理は [16] で

$$\text{index}(P^{n \pm |m|} D_{\text{GW}}) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ P^{n \pm |m|} (\Gamma + \hat{\Gamma}) \right] \quad (3.29)$$

のように構成された。ここで、 $\text{Tr}$  は行列とスピノル場の空間に作用するトレースである。 $P^{n \pm |m|}$  は (3.23) の  $n \pm |m|$  次元既約表現のヒルベルト空間を取り出す射影演算子であり、それは 2 つの非可換 2 次元球面のうち片方の球面を取り出すことを意味する。その射影演算子  $P^{n \pm |m|}$  は

$$P^{n \pm |m|} = \frac{1}{2} (1 \pm T) \quad (3.30)$$

のように表され、ここで

$$T = \frac{2}{n|m|} \left( A_i^2 - \frac{n^2 + m^2 - 1}{4} \right) \quad (3.31)$$

$$= \frac{m}{|m|} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n+m} & \\ & -\mathbf{1}_{n-m} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

である。

一方で、(3.9) より (3.31) は

$$T = \frac{2}{n|m|} \left( \rho \{L_i, a_i\} + \rho^2 a_i^2 - \frac{m^2}{4} \right) \quad (3.33)$$

と表すことができる。 $|m| \ll n$  の場合、可換極限において  $T$  は  $\frac{2\rho}{|m|}\phi$  となる。ただし、 $\phi$  は (3.13) で定義したスカラー場である。この演算子  $T$  は  $T^2 = 1_{2n}$  のように規格化される。したがって、 $T$  は TP モノポールでの破れていない  $U(1)$  ゲージ群の生成子である。TP モノポール配位は、ゲージ対称性を  $SU(2)$  から  $U(1)$  へ崩壊させる。その時、固有値  $\pm 1$  の  $T$  の固有状態は壊れずに残された  $U(1)$  対称性の電荷  $\pm 1/2$  を持つフェルミオンの状態に対応する。したがって、射影空間 (3.29) のインデックスは各電荷についてのインデックスを与える。もし射影演算子がなければ、 $+1/2$  と  $-1/2$  の電荷の寄与が相殺するため非自明なインデックスを得ることができなくなる。これが、私達が射影演算子を導入した理由である。

### 3.2.3 トポロジカル・チャージの可換極限

(3.29) の右辺が持つ特性を以下に示す。

まず始めに、カイラリティ演算子  $\Gamma$ ,  $\hat{\Gamma}$  はサイン演算子の形を持つため、(3.29) の右辺は整数値をとる。第 2 に、TP モノポール配位 (3.23) に関して、 $\pm 1/2$  の電荷の寄与により (3.29) の右辺は次の適切な値をとる：

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left[ P^{(n \pm |m|)} (\Gamma + \hat{\Gamma}) \right] = \mp |m|. \quad (3.34)$$

最後に、可換極限において (3.29) の右辺は

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{1}{2} T (\Gamma + \hat{\Gamma}) \right] \rightarrow \frac{\rho^2}{8\pi} \int_{S^2} d\Omega \epsilon_{ijk} n_i \phi'^a F_{jk}^a \quad (3.35)$$

となる。ここで、 $\phi'^a$  は  $\sum_a (\phi'^a)^2 = 1$  に規格化されたスカラー場である。非可換理論においては  $T = \phi'^a \tau^a$  として定義できる。また、 $F_{jk} = F_{jk}^a \tau^a / 2$  は  $F_{jk} = \partial_j a'_k - \partial_k a'_j - i[a'_j, a'_k]$  と定義された場の強さである。(3.35) は TP モノポール配位での破れていない  $U(1)$  成分の磁荷である<sup>1</sup>。(3.34) や  $\frac{1}{2} \text{Tr} [P^{(n \pm |m|)} (\Gamma + \hat{\Gamma})] = \pm \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{1}{2} T (\Gamma + \hat{\Gamma}) \right]$  から、(3.23) の配位に関して、

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{1}{2} T (\Gamma + \hat{\Gamma}) \right] = -|m| \quad (3.36)$$

となる。この定式化においては、負のトポロジカル・チャージのみ定義できることになる。

<sup>1</sup>本来、トポロジカル・チャージは (4.12) の第 2 項のような追加の項を持つべきであるが、TP モノポール配位に関してはこの項が消えてしまう。

### 3.2.4 ディラック演算子のスペクトル

この副節では、モノポール背景場 (3.23) で GW ディラック演算子 (3.19) のスペクトルを計算する。

$$D_{\text{GW}}^m = \left( \begin{array}{c} \frac{n}{n+m}(\sigma_i L_i^{(n+m)} + \frac{1}{2}) \\ \frac{n}{n-m}(\sigma_i L_i^{(n-m)} + \frac{1}{2}) \end{array} \right) - (\sigma_i L_i^R - \frac{1}{2}). \quad (3.37)$$

全角運動量演算子を次のように定義する。

$$M_i = L_i + a_i - L_i^R + \frac{\sigma_i}{2} \quad (3.38)$$

$$= A_i - L_i^R + \frac{\sigma_i}{2} \quad (3.39)$$

$$= \left( \begin{array}{c} L_i^{(n+m)} \\ L_i^{(n-m)} \end{array} \right) - L_i^R + \frac{\sigma_i}{2}. \quad (3.40)$$

ここで、(3.31) で定義した電荷演算子  $T$  と (3.15) で定義したカイラリティ演算子  $\Gamma$  についても考える。以下のように  $M_i, T, \Gamma$  は互いに交換するので、

$$[M_i, T] = 0, \quad (3.41)$$

$$[M_i, \Gamma] = 0, \quad (3.42)$$

$$[T, \Gamma] = 0, \quad (3.43)$$

これらの演算子について同時固有状態を考えることができる<sup>2</sup>：

$$M_i^2 |J, J_3, \delta, \nu\rangle = J(J+1) |J, J_3, \delta, \nu\rangle, \quad (3.44)$$

$$M_3 |J, J_3, \delta, \nu\rangle = J_3 |J, J_3, \delta, \nu\rangle, \quad (3.45)$$

$$T |J, J_3, \delta, \nu\rangle = \delta |J, J_3, \delta, \nu\rangle, \quad (3.46)$$

$$\Gamma |J, J_3, \delta, \nu\rangle = \nu |J, J_3, \delta, \nu\rangle. \quad (3.47)$$

$\delta = \pm 1$  の状態は、演算子  $A_i$  についてスピン  $L \pm m/2$  の状態を表し、ここで  $L$  は  $\frac{n-1}{2}$  としている。 $\nu = \pm 1$  の状態は、 $-L_i^R + \frac{\sigma_i}{2}$  についてスピン  $L \mp 1/2$  の状態を表す。したがって、(3.39) より、 $J$  は表 3.2 で与えられる値をとる。ここで、 $m$  は  $m > 0$  としている。これらの全状態数は

$$\begin{aligned} & 2 \left[ 2 \cdot \frac{m-1}{2} + 1 \right] + 4 \left[ \sum_{J=\frac{m+1}{2}}^{2L-\frac{m+1}{2}} (2J+1) \right] + 3 \left[ 2 \left( 2L - \frac{m-1}{2} \right) + 1 \right] \\ & + 2 \left[ \sum_{J=2L-\frac{m}{2}+\frac{3}{2}}^{2L+\frac{m-1}{2}} (2J+1) \right] + \left[ 2 \left( 2L + \frac{m+1}{2} \right) + 1 \right] \\ & = 4(2L+1)^2 \quad (3.48) \\ & = 4n^2, \quad (3.49) \end{aligned}$$

<sup>2</sup> $M_i$  や  $T, \hat{\Gamma}$  もまた互いに交換するので同時固有状態を考えることができ、本文で  $M_i$  や  $T, \Gamma$  を用いて行ったものと同様の計算ができる。

表 3.2: 各  $\delta, \nu$  の領域での  $J$  の値 ( $m > 0$ )

$J$	$\delta (T)$	-	-	+	+
	$\nu (\Gamma)$	+	-	+	-
$\frac{m-1}{2}$		○			○
$\frac{m+1}{2}$		○	○	○	○
$\frac{m+3}{2}$		○	○	○	○
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2L - \frac{m+1}{2}$		○	○	○	○
$2L - \frac{m-1}{2}$			○	○	○
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
$2L + \frac{m-1}{2}$				○	○
$2L + \frac{m+1}{2}$					○

と求められ、これはヒルベルト空間の完全形の自由度をすべて使い尽くしている。スペクトルが、モノポール調和関数の場合のように、ゼロでない最低スピン  $J = \frac{m-1}{2}$  から始まることに注目すべきである。さらに、 $J = \frac{m-1}{2}$  の最低スピン状態や  $(J, \delta) = (2L - \frac{m-1}{2}, -1)$ ,  $(2L + \frac{m+1}{2}, +1)$  の最高スピン状態に関して、各  $\delta$  について  $\nu = +1$  か  $\nu = -1$  のみ存在し、一方で他の状態に関して、各  $\delta$  について  $\nu = +1$  と  $\nu = -1$  の両方が存在する<sup>34</sup>。

率直な計算により、 $D_{\text{GW}}^m$  の 2 乗は次式のようになる。

$$(D_{\text{GW}}^m)^2 = \frac{n}{n+mT} \left[ M_i^2 - \frac{m^2-1}{4} \right]. \quad (3.50)$$

この  $(D_{\text{GW}}^m)^2$  は  $M_i, T, \Gamma$  とそれぞれ交換する：

$$[M_i, (D_{\text{GW}}^m)^2] = 0, \quad (3.51)$$

$$[T, (D_{\text{GW}}^m)^2] = 0, \quad (3.52)$$

$$[\Gamma, (D_{\text{GW}}^m)^2] = 0. \quad (3.53)$$

したがって、 $(D_{\text{GW}}^m)^2$  のスペクトルは以下のように得られる：

$$(D_{\text{GW}}^m)^2 |J, J_3, \delta, \nu\rangle = \frac{n}{n+m\delta} \left[ J(J+1) - \frac{m^2-1}{4} \right] |J, J_3, \delta, \nu\rangle. \quad (3.54)$$

最低スピン状態  $J = \frac{m-1}{2}$  の状態は  $D_{\text{GW}}^m$  のゼロモードに対応することに注目すべきである。

<sup>3</sup>全スペクトルの  $\nu = +1$  と  $\nu = -1$  の不均一性は  $\text{Tr}(\Gamma) = -4n$  と一致している。また、全スペクトルの  $\delta = +1$  と  $\delta = -1$  の不均一性は  $\text{Tr}(T) = 4nm$  と一致している。

<sup>4</sup> $M_i$  や  $T, \hat{\Gamma}$  に関する同時固有状態を考えることができ、表 3.2 と同じ表を作ることができる。 $D_{\text{GW}}$  のゼロモードとなる最低スピン状態に関して、 $D_{\text{GW}}$  の定義 (3.19) からわかるように、 $\Gamma$  の  $\pm$  固有値は  $\hat{\Gamma}$  についての  $\pm$  固有値に対応している。最高スピン状態に関しては、GW 関係式 (3.20) からわかるように、 $\Gamma$  の  $\pm$  固有値は  $\hat{\Gamma}$  の  $\mp$  固有値に対応する。

また、簡単な計算により次のような代数を求めることができる。

$$[M_i, D_{\text{GW}}^m] = 0, \quad (3.55)$$

$$[T, D_{\text{GW}}^m] = 0, \quad (3.56)$$

$$[\Gamma, D_{\text{GW}}^m] \neq 0. \quad (3.57)$$

それゆえ、各  $J, J_3, \delta$  についての  $\nu$  の線形結合、 $\sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle$  は

$$D_{\text{GW}}^m \left[ \sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle \right] = \pm \sqrt{\frac{n}{n+m\delta} \left[ J(J+1) - \frac{m^2-1}{4} \right]} \left[ \sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle \right] \quad (3.58)$$

のように、ディラック演算子  $D_{\text{GW}}^m$  の固有状態を与える。

GW 関係式

$$\Gamma D_{\text{GW}}^m + D_{\text{GW}}^m \hat{\Gamma} = 0, \quad (3.59)$$

$$D_{\text{GW}}^m \Gamma + \hat{\Gamma} D_{\text{GW}}^m = 0, \quad (3.60)$$

を用いることにより、 $\sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle$  が固有値  $\alpha$  の  $D_{\text{GW}}^m$  の固有状態であるならば、 $(\Gamma + \hat{\Gamma}) \sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle$  は固有値  $-\alpha$  の固有状態である。

$$D_{\text{GW}}^m \left[ \sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle \right] = \alpha \left[ \sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle \right], \quad (3.61)$$

$$D_{\text{GW}}^m \left[ (\Gamma + \hat{\Gamma}) \sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle \right] = -\alpha \left[ (\Gamma + \hat{\Gamma}) \sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle \right]. \quad (3.62)$$

ここで、

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{n}{n+m\delta} \left[ J(J+1) - \frac{m^2-1}{4} \right]} \quad (3.63)$$

である。

(3.19) からわかるように、 $\Gamma + \hat{\Gamma} = aD_{\text{GW}}^m + 2\Gamma$  なので、

$$(\Gamma + \hat{\Gamma}) \sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle = (a\alpha + 2)c_1 |J, J_3, \delta, 1\rangle + (a\alpha - 2)c_{-1} |J, J_3, \delta, -1\rangle \quad (3.64)$$

である。最高スピンの状態、表 3.2 の  $(J = 2L - \frac{m-1}{2}, \delta = -1)$  や  $(J = 2L + \frac{m+1}{2}, \delta = 1)$  は、 $\nu = -1$  のみ存在する。したがって、 $(\Gamma + \hat{\Gamma}) |J, J_3, \delta, \nu = -1\rangle$  は消えなければならない。(3.64) から、 $a\alpha = 2$  を得る。ゆえに、最高スピン状態に関して  $D_{\text{GW}}^m$  の正固有値のみが存在する。他の状態に関しては、 $\alpha = \pm \sqrt{\frac{n}{n+m\delta} \left[ J(J+1) - \frac{m^2-1}{4} \right]}$  なので、 $-2 < a\alpha < 2$  となる。 $(\Gamma + \hat{\Gamma}) \sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle$  は消えないので、正と負の固有値が両方とも存在する。図 3.2 に、 $n = 10$  や  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  の場合のスペクトルを表している。

次に、係数  $c_{\nu}$  を決定し、 $D_{\text{GW}}^m$  のゼロでない固有値の固有状態の形を求める。 $(\Gamma + \hat{\Gamma}) \sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle$  なので、 $\sum_{\nu} c_{\nu} |J, J_3, \delta, \nu\rangle$  と直交しなければならない。

$$(a\alpha + 2)|c_1|^2 + (a\alpha - 2)|c_{-1}|^2 = 0. \quad (3.65)$$

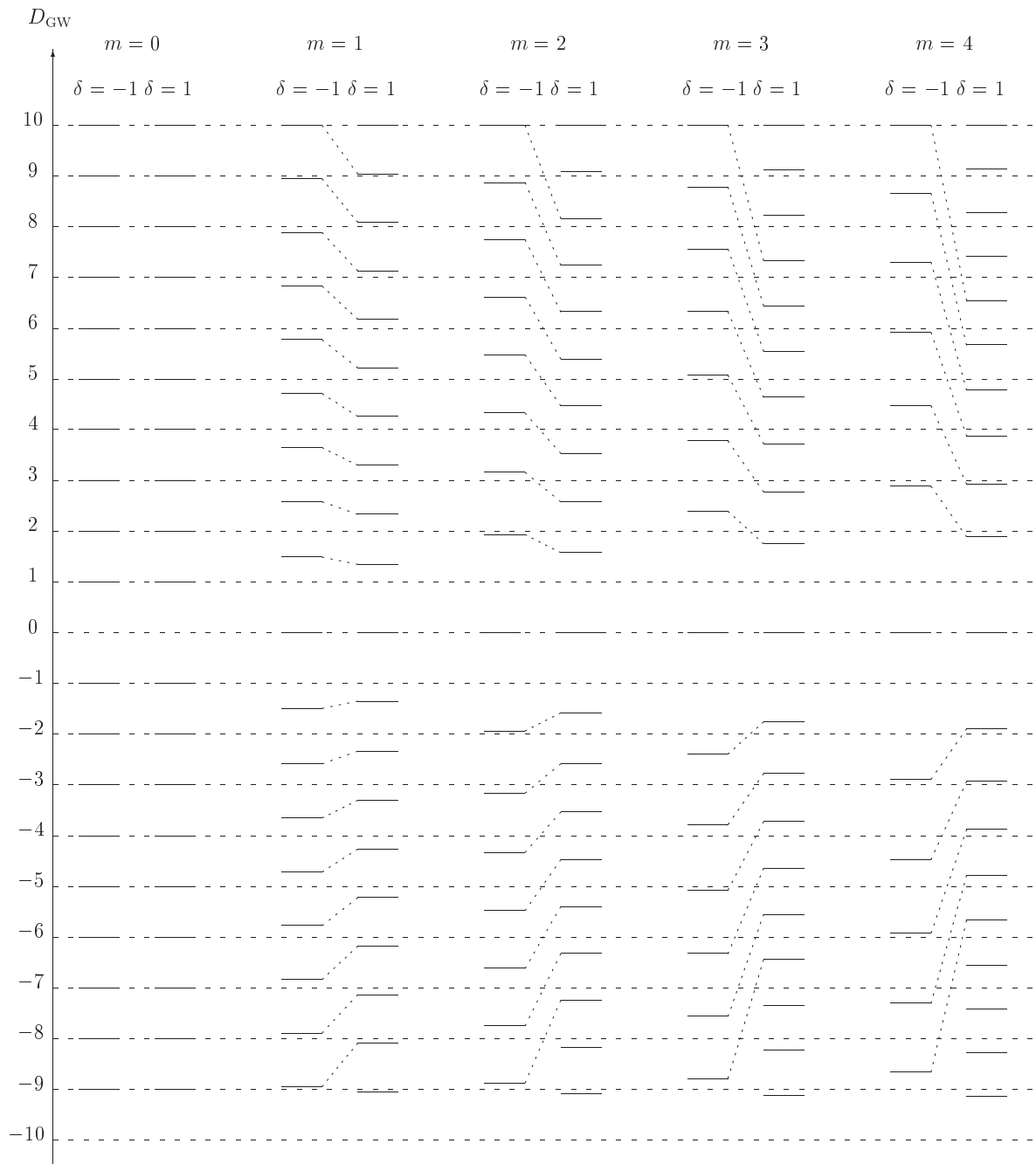


図 3.2:  $n = 10$  や  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  の GW ディラック演算子のスペクトル。点線は  $J$  の同じ値を持つ状態をつなげている。

それゆえ、固有値  $\alpha$  の固有状態は

$$\frac{1}{2} \left[ \sqrt{2 - a\alpha} |J, J_3, \delta, 1\rangle + \frac{\alpha}{|\alpha|} \sqrt{2 + a\alpha} |J, J_3, \delta, -1\rangle \right] \quad (3.66)$$

であり、 $\alpha$  は  $\alpha = \pm \sqrt{\frac{n}{n+m\delta} \left[ J(J+1) - \frac{m^2-1}{4} \right]}$  である。ここで、相対的な位相は  $|J, J_3, \delta, 1\rangle$  や  $|J, J_3, \delta, -1\rangle$  の定義に吸収させている。

次に、 $D_{\text{GW}}^m$  のカイラル・ゼロモードの数を数えることにより、インデックス定理 (3.29) を調べる。前述したように、 $D_{\text{GW}}^m$  のゼロモードは  $J = \frac{m-1}{2}$  の状態に対応し、その縮退度は  $m$  である。表 3.2 の  $(\delta, \nu) = (+1, -1)$  に関して、射影空間でのインデックスは

$$\text{Index}(P^{(n+m)} D_{\text{GW}}) = n_+ - n_- = 0 - m = -m \quad (3.67)$$

で与えられる。 $(\delta, \nu) = (-1, +1)$  について、それは

$$\text{Index}(P^{(n-m)} D_{\text{GW}}) = n_+ - n_- = m - 0 = m \quad (3.68)$$

により与えられる。(3.34) と比較すると、これはインデックス定理 (3.29) と一致する。

最後に、最高スピン状態に関していくつかコメントする。前述したように、最高スピン状態は  $D_{\text{GW}}^m$  の正固有値のみを与えるので、GW ディラック演算子の最大固有値は正の値のみをとる (図 3.2 のスペクトル参照。)  $D_{\text{GW}}$  の正と負の固有値のこの不均一性は、 $D_{\text{GW}}$  が通常のカイラル対称性を満たさない、すなわち  $\{D_{\text{GW}}, \Gamma\} \neq 0$  であるという事実から生じる。その最高スピン状態は、綿村らのディラック演算子  $D_{\text{WW}}$  のダブルラーに対応することが知られている [28]。

表 3.2 からわかるように、これらのモードは  $\nu = -1$  のみを持ち、 $\Gamma$  により定義された有限なカイラリティを持つことを意味する。スペクトルの同様のパターンは格子ゲージ理論の GW ディラック演算子  $D$  に関して供給された [34]:

- i)  $\gamma_5 D$  の固有値ゼロの  $n_{\pm}$  状態とカイラリティ  $\gamma_5$  の  $\pm 1$
- ii)  $\gamma_5 D$  の固有値  $\pm \frac{2}{a}$  の  $N_{\pm}$  状態とカイラリティ  $\gamma_5$  の  $\pm 1$
- iii) 残った状態は  $\gamma_5 D$  の固有値  $\pm \alpha_n$  を持ち、 $0 < |\alpha_n| < \frac{2}{a}$

ダブルラーの状態である  $N_{\pm}$  がインデックスを定義する上で、依然として重要な役割を演じることにもわかった。インデックス定理が伝えるように、正確に定義された連続理論において、カイラリティ演算子のトレースは  $\text{Tr}_{\text{con}}(\gamma_5) = n_+ - n_-$  になり、一方で、格子理論では  $\text{Tr}(\gamma_5) = 0$  になる。この不一致は、ダブルラーの  $N_{\pm}$  からの寄与を考慮することにより解くことができる。そのとき、 $\text{Tr}(\gamma_5) = n_+ - n_- + N_+ - N_- = 0$  は格子上で実際に満たされている。 $\text{Tr}(\gamma_5)$  の代わりに  $\frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma_5 + \hat{\gamma}_5) = \text{Tr}(\gamma_5(1 - \frac{1}{2}aD_{\text{GW}}))$  を採用することにより、あるいは、ディラック演算子の大きな固有値からの寄与をおさえるように他の因子を挿入することにより、ダブルラーを排除することができる。そのとき、インデックスの正確な値が得られ、なめらかな可換極限をとることができる。実際に、スペクトルやインデックスのこれらの特性は GW 関係式によってのみ与えられ、非可換 2 次元球面においても同様に起こる。



いま非可換 2 次元球面の場合に戻り、 $\mathcal{T}r(\gamma_5)$  の対応物、 $\mathcal{T}r(\Gamma)$  を考える。表 3.2 より、 $\delta = 1$  の領域に関して、 $n_+ - n_- = -m$  や  $N_+ - N_- = -(2n + m)$  とわかる。他の状態に関して、 $\nu$  の両方の値は対で存在する。したがって、

$$\mathcal{T}r(P^{(n+m)}\Gamma) = (n_+ - n_-) + (N_+ - N_-) = -m - (2n + m) = -2(n + m) \quad (3.69)$$

となる。同様に  $\delta = -1$  の領域に関して、

$$\mathcal{T}r(P^{(n-m)}\Gamma) = (n_+ - n_-) + (N_+ - N_-) = m - (2n - m) = -2(n - m) \quad (3.70)$$

となる。格子ゲージ理論でのように、 $\frac{1}{2}\mathcal{T}r(P^{(n\pm m)}(\Gamma + \hat{\Gamma})) = \mathcal{T}r(P^{(n\pm m)}(\Gamma + \frac{1}{2}aD_{\text{GW}}))$  を採用することにより、ダブルの寄与を排除することができる。しかしながら、(3.69) や (3.70) は消えずに残り、一方で格子ゲージ理論では  $\mathcal{T}r(\gamma_5) = 0$  である。これは (3.15) での  $\Gamma$  の定義が定数項  $-\frac{a}{2} = -\frac{1}{n}$  を持ち、したがって  $\mathcal{T}r(P^{(n\pm m)}\Gamma)$  がそれはヒルベルト空間の次元の  $-\frac{1}{n}$  倍の  $2n(n \pm m)$  という有限な値を持つからである。これらの消えない値が、磁束を導入すると解釈できる幾何の非可換性を反映する。

### 3.2.5 カイラル・ゼロモード

この副節では、 $m = 1$  の TP モノポール背景場での GW ディラック演算子に関するカイラル・ゼロモードの具体形を求める。ユニタリー変換 (3.24) により、(3.37) は次式のようになる。

$$\begin{aligned} D_{\text{GW}}^{\text{TP}} &\equiv UD_{\text{GW}}^{m=1}U^\dagger \\ &= U \left( \begin{array}{c} \frac{n}{n+1}(\sigma_i L_i^{(n+1)} + \frac{1}{2}) \\ \frac{n}{n-1}(\sigma_i L_i^{(n-1)} + \frac{1}{2}) \end{array} \right) U^\dagger - (\sigma_i L_i^R - \frac{1}{2}) \\ &= \sigma_i \tilde{L}_i + 1 + \sigma_i \frac{\tau_i}{2} - \frac{1}{n^2 - 1} L_i \tau_i \left[ 1 + 2\sigma_j (L_j + \frac{\tau_j}{2}) \right]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

この表式を使う利点は、非可換理論と可換理論の間の対応を容易に見ることができることである。たとえば、可換極限を簡単にとることができる。

第 3.2.4 節でみたように、 $D_{\text{GW}}^{\text{TP}}$  のゼロモードは  $J = \frac{m-1}{2}$  の最低スピン状態、 $m = 1$  の  $J = 0$  に対応する。したがって、それらは  $\epsilon_{\alpha l}$  や  $L^i \sigma_{\alpha\alpha'}^i \epsilon_{\alpha' l}$  のように書くことができ、ここで  $\alpha$  や  $l$  はそれぞれのスピノルやゲージ場の添字を表す。実際に、恒等式

$$\sigma^i \epsilon = -\epsilon (\tau^i)^T \quad (3.72)$$

や、あるいは添字を正確に書くならば

$$\sigma_{\alpha\alpha'}^i \epsilon_{\alpha' l} = -\tau_{ll'}^i \epsilon_{\alpha l} \quad (3.73)$$

を使うことにより、これらのモードが  $D_{\text{GW}}^{\text{TP}}$  のゼロモードであることを直接示すことがで

きる。たとえば、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
(D_{\text{GW}}^{\text{TP}}\epsilon)_{\alpha l} &= \epsilon_{\alpha l} + \frac{1}{2}\sigma_{\alpha\alpha'}^i\tau_{ll'}^i\epsilon_{\alpha'l'} - \frac{1}{n^2-1}\left[L^i\tau_{ll'}^i\epsilon_{\alpha l'} + 2L^iL^j\sigma_{\alpha\alpha'}^j\tau_{ll'}^i\epsilon_{\alpha'l'} + L^i\sigma_{\alpha\alpha'}^j\tau_{ll'}^i\tau_{l'l''}^j\epsilon_{\alpha'l''}\right] \\
&= \epsilon_{\alpha l} - \frac{1}{2}(\sigma^i\sigma^i\epsilon)_{\alpha l} - \frac{1}{n^2-1}\left[-L^i(\sigma^i\epsilon)_{\alpha l} - 2L^iL^j(\sigma^j\sigma^i\epsilon)_{\alpha l} + L^i(\sigma^j\sigma^j\sigma^i\epsilon)_{\alpha l}\right] \\
&= \epsilon_{\alpha l} - \frac{3}{2}\epsilon_{\alpha l} - \frac{1}{n^2-1}\left[2L^i(\sigma^i\epsilon)_{\alpha l} - \frac{n^2-1}{2}\epsilon_{\alpha l} - 2L^i(\sigma^i\epsilon)_{\alpha l}\right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

同様に、 $(D_{\text{GW}}^{\text{TP}}L^i\sigma^i\epsilon)_{\alpha l} = 0$ を示すことができる。

カイラル・ゼロモードは $\epsilon_{\alpha l}$ と $L^i\sigma_{\alpha\alpha'}^i\epsilon_{\alpha'l}$ の2つのゼロモードの線形結合により求められる。 $(\delta, \nu) = (\mp 1, \pm 1)$ の状態は、

$$|J=0, \delta = \mp 1, \nu = \pm 1\rangle = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma)\epsilon = \frac{1}{2}(1 \mp T)\epsilon \tag{3.75}$$

や、あるいは添字を正確に書くならば、

$$|J=0, \delta = \mp 1, \nu = \pm 1\rangle = \frac{1}{2}\left[(1 \mp \frac{1}{n})\epsilon_{\alpha l} \pm \frac{2}{n}L^i\sigma_{\alpha\alpha'}^i\epsilon_{\alpha'l}\right] = \frac{1}{2}\left[(1 \mp \frac{1}{n})\epsilon_{\alpha l} \mp \frac{2}{n}L^i\tau_{ll'}^i\epsilon_{\alpha'l'}\right] \tag{3.76}$$

により、与えられる。ただし、ここで再び、恒等式 (3.73) を用いた。

### 3.2.6 非自明なトポロジカル・チャージのダイナミカルな生成

この副節では、まずはじめにヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型を導入し、この模型でのモノポール配位の不安定性を調べる。そこで、非自明なトポロジカル・チャージを持つモノポール配位が非可換球面 $S_F^2$ 上の $U(2)$ ゲージ理論よりも安定していることを示す。これは、自発的対称性の破れによるインデックスの自発生成が起こるダイナミカルな構造を実現している。

#### ヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型

ヤン・ミルズ・チャーン・サイモン行列模型の作用は次式で定義されている [36]。

$$S[A_i] = \frac{\alpha^4}{g^2} \text{tr} \left( -\frac{1}{4}[A_i, A_j]^2 + \frac{2}{3}i \epsilon_{ijk} A_i A_j A_k \right). \tag{3.77}$$

ここで、 $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は $N \times N$ のトレースレスなエルミート行列であり、 $\alpha$ は非可換パラメータである。この模型は、3次元ユークリッド空間でチャーン・サイモン項を持つ $SU(N)$ ヤン・ミルズ理論のゼロ体積極限とみなすことができる。さらに、この模型は $SO(3)$ 回転不変性と以下に示すような $SU(N)$ ゲージ対称性を持つ。

$$A_i \rightarrow U A_i U^\dagger. \tag{3.78}$$

ただし、 $U \in SU(N)$ である。

古典的な運動方程式は次式により与えられる。

$$[A_i, [A_i, A_j]] + i\epsilon_{jkl}[A_k, A_l] = 0. \quad (3.79)$$

この最も簡単な解は、次のような可換な対角行列で与えられる。

$$A_i = \text{Diag}(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(N)}). \quad (3.80)$$

他の解は前節までに説明した非可換 2 次元球面解であり、それは

$$A_i = L_i \quad (3.81)$$

で与えられ、ここで  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は  $SU(2)$  生成子を表す。

また、解として次のような既約表現を考えることもできる：

$$A_i = \begin{pmatrix} L_i^{(n_1)} & & & \\ & L_i^{(n_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_i^{(n_k)} \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

各  $L_i^{(n)}$  は  $SU(2)$  代数の  $n$  次元既約表現であり、したがって  $N = \sum_{a=1}^k n_a$  は全行列のサイズを表す。 $n_1 = \dots = n_k \equiv n$  の場合は、 $k$  枚の非可換球面が重なっている状態に対応する。この  $k$  枚の非可換球面のまわりで模型を展開すると、非可換 2 次元球面上の  $U(k)$  ゲージ理論を与える [36]。

### モノポール配位の自由エネルギー

ここでは、TP モノポール配位に限らず、一般のモノポール配位 (3.23) を考える。

この模型の古典作用は、(3.23) を (3.77) に入れることで得ることができる。

$$\begin{aligned} W_0 &= -\frac{\alpha^4}{24g^2} (\{(n+m)^3 - (n+m)\} + \{(n-m)^3 - (n-m)\}) \\ &= -\frac{\alpha^4}{12g^2} (n^3 - n + 3m^2n). \end{aligned} \quad (3.83)$$

図 3.3 からわかるように、この古典作用は  $|m|$  の増加に合わせて単調減少するので、 $m = 0$  の  $U(2)$  配位は不安定で  $|m| = 1$  の TP モノポール配位に崩壊する。そのような変換を繰り返し、 $|m| = n$  の  $U(1)$  配位に到達する。 $|m| \ll n$  の過程は、自発的対称性の破れを通じたインデックスの自発生成の構造を実現している。余剰次元空間においてこの構造を考えることにより、私達の時空でのカイラル・フェルミオンがダイナミカルに実現される。

さらに 1-ループ補正を考える。モノポール配位 (3.23) を (B.8) に代入することにより、1-ループ有効作用は次のように求められる<sup>5</sup>。

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} \text{Tr} \log((\tilde{X}_k)^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{l=0}^{n+m-1} + \sum_{l=0}^{n-m-1} + 2 \sum_{l=m}^{n-1} \right) (2l+1) \log[l(l+1)]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

<sup>5</sup> $l = 0$  のモードはゼロモードなので、1-ループ有効作用 (3.84) ではその寄与は考慮しない。ここで、後にゼロモードの数を議論するために (3.84) ではそれらの具体形も記述している。

最終行の最初の2項は対角ブロックからの寄与であり、最後の項は非対角ブロックからの寄与である。 $\tilde{X}_i$  は行列の右上の非対角ブロック  $M$  に作用するとき  $\tilde{X}_i M = (L_i^{(n+m)L} - L_i^{(n-m)R}) M t$  なるので、その表現は  $(n+m)$  や  $(n-m)$  の次元を持つ2つの  $SU(2)$  表現を合計することにより得ることができる。

(3.84) からわかるように、 $m=0$  の配位 (3.23) は4つのゼロモードを持ち、 $m \neq 0$  の場合には2つのゼロモードを持つ。 $m=0$  と  $m=1$  の場合のこれらのゼロモード方向の不安定性については後に議論する。ここではまず、ゼロモードではないモードからの寄与を考える。

大きな  $n$  の値に関して、(3.84) の  $l$  の和は積分に置き換えることができる。したがって、 $m=0$  については

$$W_1^{m=0} = 2[n(n-1)(\log n(n-1) - 1) - 2(\log 2 - 1)] \quad (3.85)$$

であり、一方で  $m \neq 0$  に関しては

$$\begin{aligned} W_1^{m \neq 0} &= \frac{1}{2} [(n+m)(n+m-1)(\log[(n+m)(n+m-1)] - 1) \\ &\quad + (n-m)(n-m-1)(\log[(n-m)(n-m-1)] - 1) \\ &\quad + 2n(n-1)(\log n(n-1) - 1) \\ &\quad - 2 \sum_{l=1}^{m-1} (2l+1) \log [l(l+1)] \\ &\quad - 4 \cdot 2(\log 2 - 1)] \end{aligned} \quad (3.86)$$

となる。 $m \ll n$  に関して、この値の差は次のように評価できる。

$$\begin{aligned} \Delta W_1 &= W_1^{m \neq 0} - W_1^{m=0} \\ &= \frac{1}{2} [f(n+m) + f(n-m) - 2f(n)] - \sum_{l=1}^{m-1} (2l+1) \log [l(l+1)] \\ &\simeq \frac{1}{2} [f^{(2)}(n)m^2 + \frac{1}{12} f^{(4)}(n)m^4 + \dots] - \sum_{l=1}^{m-1} (2l+1) \log [l(l+1)] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 2 \log n(n-1) + \frac{(2n-1)^2}{n(n-1)} \right] m^2 + \mathcal{O}(1/n^2)m^4 + \dots \\ &\quad - \sum_{l=1}^{m-1} (2l+1) \log [l(l+1)] \\ &\simeq 2m^2 \log n . \end{aligned} \quad (3.87)$$

ここで、2行目では  $f(x) = x(x-1)\{\log x(x-1) - 1\}$  を導入し、最後の行ではラージ  $n$  極限で一番効いてくる項をとっている。

(3.85) や (3.87) から、 $n$  の値が大きな場合、 $W_1$  の  $m$  に独立な項は  $n^2 \log n$  のオーダーであり、 $W_1$  の  $m$  に依存している項は  $(\log n)m^2$  のオーダーである一方で、(3.83) から  $W_0$  の  $m$  に独立な項は  $n^3$  のオーダーであり、 $W_0$  の  $m$  に依存している項は  $nm^2$  のオーダーである：

$$W_0 \sim -n^3 - nm^2, \quad (3.88)$$

$$W_1 \sim n^2 \log n + (\log n)m^2. \quad (3.89)$$

それゆえ、(3.83) の後で言及した真空構造は、量子補正を考慮した後でさえ、 $n$  が大きな値をとる場合に量的に変わらない。すなわち、真空構造は古典的に決定されていることになる。古典作用  $W_0$  と 1-ループ補正を持つ有効作用は、図 3.3 で  $m$  の関数として表している。

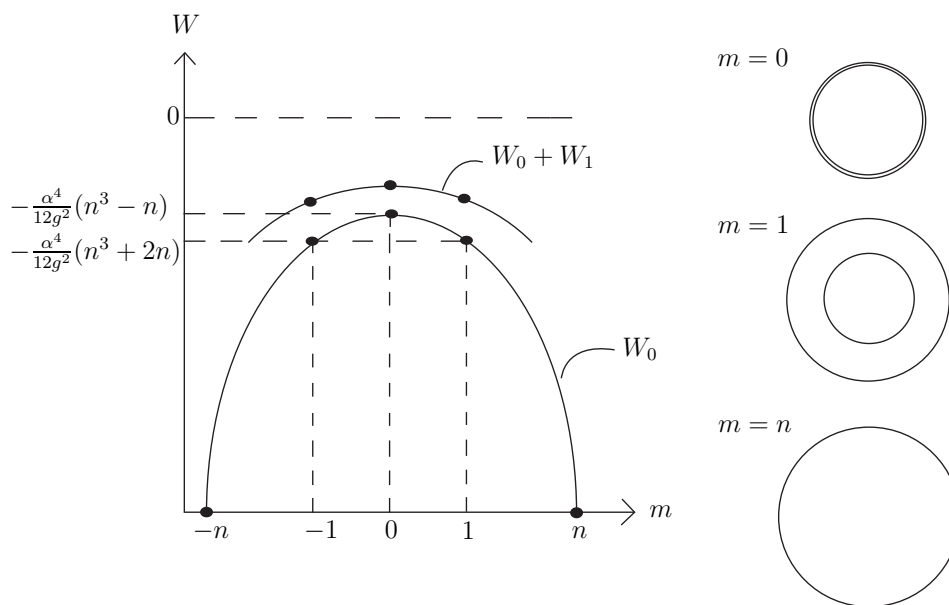


図 3.3:  $m$  の関数としての古典作用  $W_0$  と 1-ループ有効作用  $W_1$ 。ここでは、 $m = 0$  や  $m = 1$  の場合の中心が同じ 2 つの非可換 2 次元球面と  $m = n$  の場合の 1 つの非可換 2 次元球面を右側に表している。

### $U(2)$ ゲージ理論の不安定性

ここでは、前述したゼロモードを通して、 $m = 0$  の 2 つの重なった非可換 2 次元球面、すなわち  $U(2)$  ゲージ理論の不安定性を分析する。また、この配位が  $|m| = 1$  の TP モノポール配位へ崩壊する過程を考える。

$m = 0$  の 2 枚の重なった非可換 2 次元球面がどのように崩壊するかを見るために、この配位のまわりのゼロモード方向を考える。(3.84) の下で言及したように、4 つのゼロモードが存在する。その 1 つは並進  $A_i \sim \mathbf{1}_{2n}$  を表すが、それは行列  $A_i$  に課したトレースレス条件により無視すべきである。したがって、以下の背景を考える<sup>6</sup>。

$$X_i = L_i^{(n)} \otimes \mathbf{1}_2 + h_i^a \mathbf{1}_n \otimes \tau^a. \quad (3.90)$$

<sup>6</sup> $h_i^a$  の  $a = 3$  方向のみを持つ背景 (3.90) に関しては、[37] で議論されている。この方向は、2 つの非可換球面の位置をそれぞれずらすような方向である。しかしながら、2 つの重なった球面は 2 つの球面のサイズを変えることにより、前節の分析や [37] の数値計算からもわかるように、TP モノポール配位に崩壊するように見える。したがって、崩壊過程を議論するために (3.92) 方向を考える。

古典作用は (3.90) を (3.77) に代入することにより得られ、

$$W_0 = -\frac{\alpha^4}{12g^2}(n^3 - n) + \frac{\alpha^4}{g^2}n [2\{(h_i^a h_i^a)^2 - (h_i^a h_j^a)^2\} - 8 \det(h_i^a)] \quad (3.91)$$

となり、 $h_i^a$  の 3 次や 4 次のオーダーの項を持つ。3 次のオーダーの項  $-8 \det(h_i^a)$  は  $h_i^a \propto \delta_{ia}$  の方向で最小になるので、2 つの重なった非可換球面はこの方向に崩壊する。付録??で示すように、(3.91) は  $h_i^a = \frac{1}{2}\delta_{ia}$  で絶対値で最小の値をとり、それは TP モノポール配位にほかならない。それゆえ、2 つの重なった非可換球面は、 $h = 0$  から  $h = 1$  へ

$$X_i = L_i^{(n)} \otimes \mathbf{1}_2 + h \mathbf{1}_n \otimes \frac{\tau^i}{2} \quad (3.92)$$

の方向に沿って TP モノポール配位へ崩壊する。

次に、背景 (3.90) まわりの 1-ループ補正を評価する。1-ループ有効作用は (3.92) を (B.8) に代入することにより、次のように求められる。

$$W_1 = \frac{1}{2} \mathcal{T}r \operatorname{tr}' \log \left[ (\tilde{X}_k)^2 \delta_{ij} - 2i \epsilon_{ijk} h_k^a \tilde{\tau}^a + 4i h_i^a h_j^b \epsilon_{abc} \tilde{\tau}^c \right] - \mathcal{T}r \log \left[ (\tilde{X}_k)^2 \right]. \quad (3.93)$$

ここで、 $\tilde{X}_i$  や  $\tilde{\tau}_i$  は随伴演算子であり、それは

$$\tilde{X}_i M = [L_i^{(n)} \otimes \mathbf{1}_2 + h_i^a \mathbf{1}_n \otimes \tau^a, M], \quad (3.94)$$

$$\tilde{\tau}_i M = [\tau_i, M] \quad (3.95)$$

のようにエルミート行列  $M$  に作用する。 $h_i^a$  の摂動展開の 2 次のオーダーまで考えると、1-ループ有効作用は次式のようなになる。

$$W_1 = 2 \sum_{l=1}^{n-1} (2l+1) \log [l(l+1)] + (h_i^a)^2 \left[ \frac{4}{3} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} - 16 \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2l+1}{(l(l+1))^2} \right] \quad (3.96)$$

ただし、 $l = 0$  のゼロモードは補正モードであり別々に扱うべきなので、ここでは導入していない。 $(h_i^a)^2$  の係数は、 $n = 374$  で負から正へ符号を変え、ラージ  $n$  極限では

$$W_1 \simeq 2[n(n-1)(\log n(n-1) - 1) - 2(\log 2 - 1)] + (h_i^a)^2 \left[ \frac{4}{3}(\log n(n-1) - \log 2) - 16 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right] \quad (3.97)$$

である。

以上をまとめると、2 つの重なった非可換 2 次元球面は 3 つの非自明なゼロモードを持ち、古典作用 (3.91) からわかるように、それは崩壊方向を含んでいる。1-ループ補正を含むと、3 つのゼロモード方向すべてが  $n \leq 373$  に関して不安定になり、 $n \geq 374$  に関して安定である。したがって、大きな  $n$  の値について、この配位は準安定になる。そのとき、

TP モノポール配位への変化は量的に異ならなければならない。しかしながら、1-ループ補正が  $(\log n)h^2$  のようになり、一方で古典的な寄与は  $-nh^3$  のようになるので、ラージ  $n$  極限で準安定性は無視できる。(図 3.4 参照。)

経路 (3.92) に沿って  $W_0 + W_1$  を描くことにより、この特性を考える。

$$W_0 + W_1 = -\frac{\alpha^4}{12g^2}(n^3 - n) + 2 \sum_{l=1}^{n-1} (2l+1) \log[l(l+1)] + V_0(h) + V_1(h) \quad (3.98)$$

ここで、

$$V_0(h) = \frac{\alpha^4 n}{g^2} \left( \frac{3}{4} h^4 - h^3 \right), \quad (3.99)$$

$$V_1(h) = \left[ \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} - 12 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \right] h^2 \quad (3.100)$$

である。図 3.4 では、(a) の古典ポテンシャル  $V_0(h)$  と、(b) の  $n$  が小さい値の場合の 1-ループ有効ポテンシャル  $V_0(h) + V_1(h)$  と (c) の  $n$  が大きい値の場合の 1-ループ有効ポテンシャル  $V_0(h) + V_1(h)$  を表している。

### TP モノポール配位の不安定性

前節では、 $U(2)$  ゲージ理論から TP モノポール配位への遷移を分析した。TP モノポール配位は安定しておらず、 $|m|$  のより大きな状態へ崩壊する。ここでは、TP モノポール配位の不安定性について調べる。TP モノポール配位が崩壊する方法を見ることにより、この配位のまわりのゼロモード方向を考える。(3.84) の後に言及したように 2 つのゼロモードが存在し、その 1 つはすべての並進  $A_i \sim \mathbf{1}_{2n}$  で考慮する必要はない。したがって、以下の背景を考える。

$$X_i = \begin{pmatrix} L_i^{(n+1)} & \\ & L_i^{(n-1)} \end{pmatrix} + h_i \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} \mathbf{1}_{n+1} & \\ & -\frac{n+1}{n} \mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

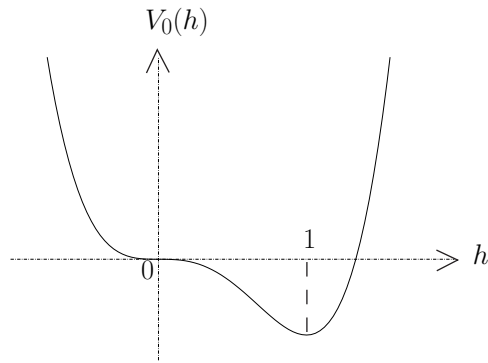
古典作用は (3.101) を (3.77) に代入することにより得られ、それは次のようになる。

$$W_0 = -\frac{\alpha^4}{12g^2}(n^3 + 2n). \quad (3.102)$$

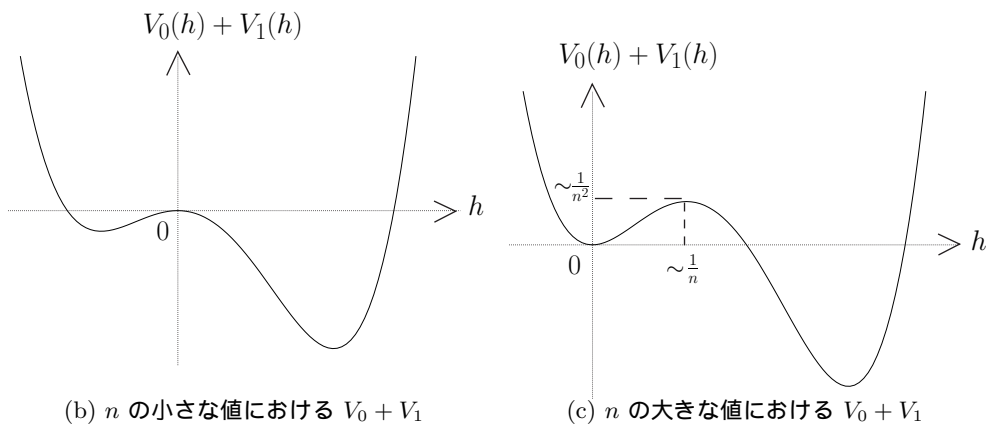
この方向は、 $h_i$  の 2 次のオーダーだけでなく、すべてのオーダーで平坦であることに注目すべきである。したがって、ゼロモードでないモードも含めて、TP モノポール配位が崩壊する方向を探さなければならない。経路  $h$  のポテンシャルが

$$V_0(h) \sim n(h^2 - h^3) \quad (3.103)$$

のような形をもち、その経路が  $|m| = 1$  の TP モノポール配位を  $|m| = 2$  の配位へつなげるような方向を見つけることは、興味深い課題である。どのような場合においても、TP モノポール配位は古典的には準安定である。



(a) 古典的ポテンシャル  $V_0$



(b)  $n$  の小さな値における  $V_0 + V_1$

(c)  $n$  の大きな値における  $V_0 + V_1$

図 3.4: (a) 古典作用は  $h = 0$  で平坦であり、 $h = 1$  で最小値をとる。(b)1-ループポテンシャルは、 $n$  の小さな値に関して  $h = 0$  で不安定である。(c)1-ループポテンシャルは、 $n$  の大きな値に関して  $h = 0$  で準安定である。



今、背景 (3.101) まわりの 1-ループ有効作用を求め、(3.101) を (B.8) に代入することにより、1-ループ有効作用

$$W_1 = \frac{1}{2} \mathcal{T}r \operatorname{tr}' \log [(\tilde{X}_k)^2 \delta_{ij} - 2i\epsilon_{ijk} \tilde{H}_k] - \mathcal{T}r \log ((\tilde{X}_k)^2) \quad (3.104)$$

を得ることができる。ここで、 $\tilde{X}_i$  と  $\tilde{H}_i$  は

$$\tilde{X}_i M = \left[ \begin{pmatrix} L_i^{(n+1)} & \\ & L_i^{(n-1)} \end{pmatrix} + h_i \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} \mathbf{1}_{n+1} & \\ & -\frac{n+1}{n} \mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix}, M \right], \quad (3.105)$$

$$\tilde{H}_i M = \left[ h_i \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} \mathbf{1}_{n+1} & \\ & -\frac{n+1}{n} \mathbf{1}_{n-1} \end{pmatrix}, M \right] \quad (3.106)$$

のようにエルミート行列  $M$  に作用する随伴演算子である。 $h_i$  の摂動展開の 2 次まで考えると、

$$W_1 = \frac{1}{2} \left( \sum_{l=1}^n + \sum_{l=1}^{n-2} + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \right) (2l+1) \log [l(l+1)] \\ + (h_i)^2 \left[ \frac{4}{3} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2l+1}{l(l+1)} - 16 \sum_{l=1}^{n-1} \frac{2l+1}{(l(l+1))^2} \right] \quad (3.107)$$

となる。ゼロモードは補正モードであり別々に扱うべきなので、ゼロモードは除いている。 $(h_i)^2$  の係数は  $n = 374$  で負から正へ符号を変え、 $n$  が大きな値をとる極限で  $8/3 \log n$  になる。それゆえ、この方向に沿って、TP モノポール配位は小さな  $n$  に関して不安定になり、大きな  $n$  に関して安定になる。

TP モノポール配位からの崩壊に関してのように、他の方向についても考えなければならない。(3.103) で言及したように、TP モノポール配位は古典的なレベルでさえ準安定である。 $(\log n)h^2$  のオーダーの量子補正は、古典的な準安定性の定性的な特徴をかえないだろう。 $|m| \geq 1$  のすべてのモノポール配位もまた非自明なゼロモードを 1 つだけもつので、これと同じ特性を持つと考えられる。

## 第4章 非可換2次元球面 $S_F^2$ 上での一般の配位への拡張

### 4.1 一般の配位における定式化

第3章では、モノポール配位 (3.23) に関するインデックス定理 (3.29) について述べた。これをふまえて、この章ではモノポール配位のような特定の配位に限らず、運動方程式を満たさないようなより一般の配位に関して定義を拡張する。ここでの唯一の仮定として、 $U(2)$  ゲージ対称性がヒッグス機構を通して自発的に  $U(1) \times U(1)$  に破れること、つまりスカラー場がノンゼロの値をとるということを要請している。

#### 4.1.1 一般化

まず最初に、(3.31) の演算子  $T$  の定義を下式のように一般化する：

$$T' = \frac{(A_i)^2 - \frac{n^2 - 1}{4}}{\sqrt{\left[(A_i)^2 - \frac{n^2 - 1}{4}\right]^2}}. \quad (4.1)$$

この定義は、分母がゼロにならない限り、一般の配位  $A_i$  について有効である。モノポール配位 (3.23) に関して、 $T'$  は確かに (3.32) になる。その上さらに、

$$(T')^\dagger = T', \quad (T')^2 = 1 \quad (4.2)$$

を満たし、その固有値は  $\pm 1$  の値をとる。付録 C で示すように、 $T'$  の可換極限は

$$T' \rightarrow 2\phi' = 2\phi'^a \frac{\tau^a}{2} \quad (4.3)$$

のように規格化されたスカラー場になる。ここで、 $U(2) = SU(2) \times U(1)$  ゲージ群の  $U(1)$  部分は除く。その時、固有値  $\pm 1$  の  $T'$  の固有状態は電荷  $\pm 1/2$  のフェルミオンの状態に対応する。そのため、 $1/2$  の因子を無視して、この  $T'$  を電荷演算子と呼ぶことにする。

次に、カイラリティ演算子の定義を次式のように修正する：

$$\Gamma' = \frac{\{T', \Gamma\}}{\sqrt{\{T', \Gamma\}^2}} = T'\Gamma, \quad (4.4)$$

$$\hat{\Gamma}' = \frac{\{T', \hat{\Gamma}\}}{\sqrt{\{T', \hat{\Gamma}\}^2}}. \quad (4.5)$$

ここで、 $\Gamma$  や  $\hat{\Gamma}$  は (3.16) や (3.15) で定義したものであり、(4.4) では  $[T', \Gamma] = 0$  を使用した。これらのカイラリティ演算子は電荷演算子  $T'$  で重みをつけられている一方で、依然として

$$(\Gamma')^\dagger = \Gamma', \quad (\hat{\Gamma}')^\dagger = \hat{\Gamma}', \quad (\Gamma')^2 = (\hat{\Gamma}')^2 = 1 \quad (4.6)$$

という通常の関係式を満たす。

次の段階として、GW ディラック演算子を以下のように修正して定義する：

$$D'_{\text{GW}} = -a^{-1}\Gamma'(1 - \Gamma'\hat{\Gamma}'). \quad (4.7)$$

このディラック演算子  $D'_{\text{GW}}$  は、すでに電荷演算子  $T'$  により重みをつけて定義されていることに注意したい。付録 D で述べるように、可換極限においてディラック演算子  $D'_{\text{GW}}$  は

$$D'_{\text{GW}} \rightarrow \frac{1}{2}\{2\phi', D'_{\text{com}}\} \quad (4.8)$$

となる。特に  $\phi'^a(x) = (0, 0, 1)$  ゲージにおいて、ディラック演算子  $D'_{\text{GW}}$  は

$$\tau^3 \left( \sigma_i \mathcal{L}_i + 1 + \rho \sigma_i P_{ij} \left( a_j^3 \frac{\tau^3}{2} + a_j^0 \frac{1}{2} \right) \right) \quad (4.9)$$

となる。これは破れていない  $U(1) \times U(1)$  のゲージ場  $a_j^3, a_j^0$  に結合したディラック演算子を表している。

(4.7) の定義より、ディラック演算子  $D'_{\text{GW}}$  は GW 関係式を満たす：

$$\Gamma' D'_{\text{GW}} + D'_{\text{GW}} \hat{\Gamma}' = 0. \quad (4.10)$$

したがって、前章と同じようにインデックス定理

$$\frac{1}{2} \text{index}(D'_{\text{GW}}) = \frac{1}{4} \text{Tr}[\Gamma' + \hat{\Gamma}'] \quad (4.11)$$

が成り立つ。 $\Gamma'$  や  $\hat{\Gamma}'$  は電荷演算子  $T'$  により重みをつけて定義されているので、電荷  $\pm 1/2$  の寄与によりインデックスが相殺されることを防ぐことができる。モノポール配位 (3.23) に関して、 $T'$  は  $\hat{\Gamma}$  と交換するので  $\hat{\Gamma}' = T'\hat{\Gamma}$  となる。したがって、(4.11) の右辺は、前章で得たトポロジカル・チャージ (3.35) の左辺になる。配位 (3.28) に関して、(4.11) の右辺はゼロになる。

さらに、付録 D で見るように、一般の配位に関して、(4.11) の可換極限は

$$\frac{1}{4} \text{Tr}[\Gamma' + \hat{\Gamma}'] \rightarrow \frac{\rho^2}{8\pi} \int_{S^2} d\Omega \epsilon_{ijk} n_i \left( \phi'^a F_{jk}^a - \epsilon_{abc} \phi'^a (D_j \phi')^b (D_k \phi')^c \right) \quad (4.12)$$

となる。ここで、 $F_{jk} = F_{jk}^a \tau^a / 2$  は場の強さであり  $F_{jk}$  は  $F_{jk} = \partial_j a'_k - \partial_k a'_j - i[a'_j, a'_k]$ 、 $D_j$  は  $D_j = \partial_j - i[a'_j, \ ]$  で定義される共変微分、 $a'_j$  は (3.13) で定義されたゲージ場の接線成分である。これはまさに、トーフトによって与えられた、ゲージ対称性が  $SU(2)$  から  $U(1)$  に自発的に破れたときのトポロジカル・チャージになっている [38]。したがって、インデックス定理 (4.11) は TP モノポール配位のような特定の配位に制限しない一般の配位に関する自然な一般化になっていることがわかる。

#### 4.1.2 許容条件

いま、トポロジカル・チャージを一般の配位に関して定義できたので、非可換 2 次元球面上のゲージ場の配位空間をトポロジカル・セクターに分類できる。このためには、トポロジカル・チャージが異なる領域を分離するように、配位空間で不要な領域を取り除く作業が必要になる。格子ゲージ理論では、この条件やオーバーラップ・ディラック演算子の局所性を許容条件が保証している [11, 12, 13]。ここでは、前節の定式化 (4.11) において、同様の条件を考える。

前節の定式化 (4.11) の有効性は、電荷演算子  $T'$ (4.1) とカイラリティ演算子の  $\hat{\Gamma}$ (3.16) や  $\hat{\Gamma}'$ (4.5) の 3 つの演算子の分母がゼロでない限り保証されている。第 4.2 節では、具体的な配位に関してこの条件を調べており、付録 E でゼロモードについて分析している。

以下では、可換極限の有効性を保証するためのより強い条件を考える。これは、前述の条件の十分条件になる。

配位  $A_i = L_i + \rho a_i$  の最初の条件は、揺らぎ  $\rho a_i$  が古典的背景場  $L_i$  よりも大きくなならないことである。そうでなければ、揺らぎ  $\rho a_i$  が空間の構造を変えてしまい、非可換 2 次元球面上のゲージ理論を考えるという前提を壊してしまう。この条件はユニタリー変換  $U$  で適当に選んだゲージ  $A_i^U = U A_i U^\dagger$  に関して、以下の条件を満たす：

$$\| A_i^U - L_i \otimes \mathbf{1}_2 \| < \epsilon, \quad \epsilon \sim n^0. \quad (4.13)$$

ここで、 $\| \mathcal{O} \|$  は演算子  $\mathcal{O}$  のすべての固有値の絶対値のうち最大のものを表す。条件 (4.13) はすべての固有値がオーダー  $n^0$  の  $\epsilon$  によって制限されていることを示す。

(4.13) に代わる条件として

$$\| [A_i, A_j] - \epsilon_{ijk} A_k \| < \epsilon', \quad \epsilon' \sim n^0 \quad (4.14)$$

を課すこともできる。可換極限において、場の強さ  $F_{ij}$  やスカラー場の共変微分  $D_i \phi$  を  $\epsilon'$  で制限する条件になる。こういう意味で、これは格子ゲージ理論の許容条件 [11, 12, 13] と同様の条件になっている。非可換トーラス上の許容条件は [39] で調べられている。この条件は 2 つのブロックの古典的背景場のまわりの揺らぎを考えるには十分な条件であるが、2 枚以上の非可換球面を含む配位、たとえば  $A_i \sim L_i \otimes \mathbf{1}_3$  のような  $SU(2)$  の既約表現 3 つから成る配位でも許容してしまう。これらの配位を取り除くために、さらに次の条件を課す：

$$\left| \text{Tr}(A_i^2) - 2n \frac{n^2 - 1}{4} \right| < \epsilon'', \quad \epsilon'' \sim o(n^3). \quad (4.15)$$

2 つ以上のブロックを含む配位は  $n^3$  のオーダーの値を持つため、この条件により除外される。モノポール配位 (3.23) はオーダー  $m^2 n$  の値を与える。したがって、 $\epsilon''$  はオーダー  $n^3$  よりも小さい値をとらなければならない、またオーダー  $n$  と等しいかそれ以上でなければならない。条件 (4.13) は  $\epsilon'' \sim n^2$  に対応している。

2 つ目の条件は、 $U(2)$  ゲージ対称性が  $U(1) \times U(1)$  に自発的に破れることである。これはすなわち、スカラー場が球面上の任意の点  $x$  でゼロでない値を持つことを意味する： $\rho^2 \sum_{a=1}^3 (\phi^a(x))^2 \neq 0$ 。さもなければ、トポロジカル・チャージ (4.12) を定義できなくな

る。これにより、(4.13) のように、ゲージ  $A_i^U$  において

$$\left\| \text{tr}_\tau \left( [(A_i)^2 - (L_i)^2] - \frac{1}{2} \text{tr}_\tau [(A_i)^2 - (L_i)^2] \right)^2 \right\|' > \eta, \quad \eta \sim n^2 \quad (4.16)$$

の条件を課す。ここで、 $\|\mathcal{O}\|'$  は演算子  $\mathcal{O}$  のすべての固有値のうち最小のものを表す。 $\text{tr}_\tau$  はゲージ群の空間のトレースを意味し、球面座標を表す行列要素をそのままにする。ここでは  $SU(2)$  部分のスカラー場が消えない値を持つという条件を得るために、(C.2) や (C.3) の関係式を用いた。

以上のことから、これらの2つの条件は揺らぎに対して下限 (4.16) と上限の (4.13)、あるいは (4.14) や (4.15) を与える。ここでは古典的な配位が適当な可換極限を持つという条件を考えたが、量子論を定義するためには、制限を加えている  $\epsilon$  や  $\eta$  の数値的な値をより正確に特定する必要があり、それができれば、これらの条件が妥当な十分条件であると証明することができるだろう。

#### 4.1.3 トポロジカル・チャージの特性

この節では、トポロジカル・チャージ (4.12) のトポロジカルな特性について考える。まずは可換理論で知られているいくつかの特性について復習し、その後非可換理論でも同様にその特性が保持されていることを示す。特に、可換理論でのように、トポロジカル・チャージが非可換理論でのスカラー場の巻き付き数として書き表すことができることを示す。

可換理論でのトポロジカル・チャージは (4.12) の右辺で定義されている：

$$Q_{\text{com}} = \frac{\rho^2}{8\pi} \int_{S^2} d\Omega \epsilon_{ijk} n_i F_{jk}. \quad (4.17)$$

ここで、フラックス  $F_{jk}$  は

$$F_{jk} = \phi'^a F_{jk}^a - \epsilon_{abc} \phi'^a (D_j \phi')^b (D_k \phi')^c \quad (4.18)$$

であり、ゲージ不変である。 $\phi' = (0, 0, 1)$  ゲージにおいて、これは破れていない  $U(1)$  成分のフラックス  $\partial_j a_k^3 - \partial_k a_j^3$  になる。チャージ  $Q_{\text{com}}$  はトポロジカル不変でもあり、この意味でゲージ場やスカラー場の任意の変換の下で不変である。実際に、 $F_{jk}$  は

$$F_{jk} = -\epsilon_{abc} \phi'^a (\partial_j \phi')^b (\partial_k \phi')^c + \partial_j (\phi'^a a_k^a) - \partial_k (\phi'^a a_j^a) \quad (4.19)$$

と書き表すことができる [40]。この時、場の配位が特異点を持たなければ、トポロジカル・チャージ  $Q_{\text{com}}$  はスカラー場  $\phi'$  の巻き付き数に等しく、これはクロネッカーインデックスとして知られている。

以下では、これらの特性が非可換理論のトポロジカル・チャージである (4.12) の右辺においても保持されていることを示す。実際に、 $\text{Tr}(\Gamma')$  と  $\text{Tr}(\hat{\Gamma}')$  の両方がゲージ不変であり、トポロジカル不変である。ここで、任意の連続変換の下でサイン演算子のトレースが不変であることに注意したい。 $\text{Tr}(\Gamma')$  と  $\text{Tr}(\hat{\Gamma}')$  に関して、以下で詳細を述べる。

任意の配位  $A_i = L_i + \rho a_i$  に関して、 $L_i$  と  $A_i$  の間を内装する次のような配位を導入する：

$$A_i^h = L_i + h \rho a_i . \quad (4.20)$$

ここで、パラメータ  $h$  は  $\mathcal{O}(1)$  の実数である。この配位についての電荷演算子 (4.1) は

$$T' = \frac{h}{|h|} \frac{\{L_i, \rho a_i\} + h(\rho a_i)^2}{\sqrt{[\{L_i, \rho a_i\} + h(\rho a_i)^2]^2}} \quad (4.21)$$

になる。配位  $a_i$  が (4.13) や (4.16) を満たすように制限するならば、 $[\{L_i, \rho a_i\} + h(\rho a_i)^2]^2$  の固有値は  $n^2$  のオーダーになり、 $a_i^2$  の固有値は 1 のオーダーになる。したがって、(4.1) の分母は、任意の  $h \sim \mathcal{O}(1)$  でゼロモードを持たない。この時、(4.1) は  $h/|h|$  の因子を除いて  $h$  の連続関数である。

配位 (4.20) についての  $\mathcal{T}r(\Gamma')$  は

$$\mathcal{T}r(\Gamma') = \text{Tr}_{R,\sigma}(\Gamma) \text{Tr}_{L,\tau}(T') = -2 \frac{h}{|h|} \text{Tr}_{L,\tau} \left( \frac{\{L_i, \rho a_i\} + h(\rho a_i)^2}{\sqrt{[\{L_i, \rho a_i\} + h(\rho a_i)^2]^2}} \right) , \quad (4.22)$$

になる。 $\text{Tr}_{R,\sigma}$  は右から作用する行列のトレースを意味し、スピノル空間をはしる。 $\text{Tr}_{L,\tau}$  は左から作用する行列のトレースを意味し、ゲージ群の空間をはしる。(4.22) のトレース部分はトポロジカル不変なので、 $a_i$  が許容条件を満たすならば、任意の  $h \sim \mathcal{O}(1)$  に関して定数値をとる。したがって、(4.22) のトレース部分を  $h = 0$  の場合で次のように置き換えることができる：

$$\mathcal{T}r(\Gamma') = -2 \frac{h}{|h|} \text{Tr}_{L,\tau} \left( \frac{\{L_i, \rho a_i\}}{\sqrt{\{L_i, \rho a_i\}^2}} \right) . \quad (4.23)$$

同様に、

$$\mathcal{T}r(\hat{\Gamma}') = \frac{h}{|h|} \mathcal{T}r \frac{\left\{ \frac{\{L_i, \rho a_i\} + h(\rho a_i)^2}{\sqrt{[\{L_i, \rho a_i\} + h(\rho a_i)^2]^2}} , \hat{\Gamma} \right\}}{\sqrt{4 + \left[ \frac{\{L_i, \rho a_i\} + h(\rho a_i)^2}{\sqrt{[\{L_i, \rho a_i\} + h(\rho a_i)^2]^2}} \hat{\Gamma} \right]^2}} \quad (4.24)$$

は、 $h = 0$  の

$$\mathcal{T}r(\hat{\Gamma}') = \frac{h}{|h|} \mathcal{T}r \frac{\left\{ \frac{\{L_i, \rho a_i\}}{\sqrt{\{L_i, \rho a_i\}^2}} , \frac{2}{n} \left( \sigma \cdot L + \frac{1}{2} \right) \right\}}{\sqrt{4 + \left[ \frac{\{L_i, \rho a_i\}}{\sqrt{\{L_i, \rho a_i\}^2}} , \frac{2}{n} \left( \sigma \cdot L + \frac{1}{2} \right) \right]^2}} \quad (4.25)$$

に等しい。

次に、(4.23) や (4.25) の可換極限をとり、その量の可換理論での対応物に関して考える。(4.23) の可換極限は

$$\mathcal{T}r(\Gamma') \rightarrow -2 \frac{h}{|h|} n \int \frac{d\Omega}{4\pi} \text{tr}_\tau \left( 2\phi' + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad (4.26)$$

となる。ここで、 $\text{tr}_\tau$  はゲージ群の空間のトレースを表す。 $\phi'$  が  $U(1)$  成分を持たなければ、この第1項はトレースをとった後に消える。 $\text{Tr}_L$  をとることで (4.26) の  $n$  の因子を与えるので、スカラー場  $\phi'$  の  $1/n$  補正である第2項は有限の値をとる。それゆえ、可換理論における (4.26) の意味は曖昧である。 $\mathcal{T}r(\Gamma')$  は非可換理論ではゲージ不変でありトポロジカル不変な量であるが、可換理論での対応物が存在しない。GW 代数によって示すことができたように、この量はダブラーのインデックスに関する [16, 34]。

(4.25) の分母を展開すると、下式を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}r(\hat{\Gamma}') &= 2 \frac{h}{|h|} \text{Tr}_{L,\tau} \left( \frac{\{L_i, \rho a_i\}}{\sqrt{\{L_i, \rho a_i\}^2}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{h}{|h|} \left( \frac{2}{n} \right)^2 \mathcal{T}r \left( \frac{\{L_i, \rho a_i\}}{\sqrt{\{L_i, \rho a_i\}^2}} (\sigma \cdot L) \left[ \frac{\{L_i, \rho a_i\}}{\sqrt{\{L_i, \rho a_i\}^2}}, \sigma \cdot L \right]^2 \right) + \mathcal{O}(1/n). \end{aligned} \quad (4.27)$$

第1項は (4.23) のマイナスに正確に一致する。したがって、この項は (4.12) の左辺であるトポロジカル・チャージにおいてキャンセルされる。第2項は可換理論でスカラー場  $\phi'$  の巻き付き数になる。よって、可換理論において、配位  $A_i = L_i + \rho a_i$  についてのトポロジカル・チャージはスカラー場の巻き付き数になる：

$$\frac{1}{4} \mathcal{T}r(\Gamma' + \hat{\Gamma}') \rightarrow -\frac{\rho^2}{8\pi} \int_{S^2} d\Omega n_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \phi'^a (\partial_j \phi'^b) (\partial_k \phi'^c). \quad (4.28)$$

ここで、配位 (4.20) がもともとの配位  $A_i = L_i + \rho a_i$  に戻るように、 $h = 1$  を選んでいる。

第4.1節では、トポロジカル・チャージの可換極限が (4.12) の可換理論におけるトポロジカル・チャージになることを示した。そして今、トポロジカルな議論を用いて、(4.28) でスカラー場  $\phi'$  の巻き付き数になることも示した。これは (4.18) や (4.19) で見たように、可換理論と一致している。

## 4.2 ある具体的な配位に関する具体例

この節では、任意の実数  $h$  に関して次の配位について考える：

$$A_i = L_i + h \frac{\tau_i}{2}. \quad (4.29)$$

$h = 1$  の場合は、 $m = 1$  の TP モノポール配位 (3.24) に対応する。

以下では、これらの配位に関してトポロジカル・チャージを計算していく。また GW ディラック演算子が簡潔な形で書けることも示す。この配位が許容条件を満たすならば、その結果は可換理論の対応物に一致する。さらには、配位 (4.29) を許容されていない領域にまで外挿する。

### 4.2.1 可換理論におけるトポロジカル・チャージ

非可換理論で計算する前に、まず可換理論で配位 (4.29) の考察を行う。

(3.9) から、(4.29) についてのゲージ場は

$$a_i = \frac{1}{\rho} h \mathbf{1}_n \otimes \frac{\tau_i}{2} \quad (4.30)$$

により与えられる。可換極限をとり、(3.13) のように球面の接線成分と垂直成分に分解すると、

$$a_i^{!a} = h \frac{1}{\rho} \epsilon_{ija} n_j, \quad (4.31)$$

$$\phi^a = h \frac{1}{\rho} n_a \quad (4.32)$$

を得る。これは TP モノポール配位 (3.26) や (3.27) に  $h$  がかったものである。(4.19) で述べたように、可換理論のトポロジカル・チャージは

$$Q_{\text{com}} = -\frac{\rho^2}{8\pi} \int_{S^2} d\Omega n_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \phi^{!a} (\partial_j \phi^{!b}) (\partial_k \phi^{!c}) \quad (4.33)$$

と書くことができ、これは規格化されたスカラー場  $\phi'$  の巻き付き数になっている。(4.32) を代入すると、

$$Q_{\text{com}} = -\frac{h}{|h|} \quad (4.34)$$

となる。

その上、GW ディラック演算子自体は簡単な形で書けることはすでに示した。 $D'_{\text{GW}}$  の可換極限は (4.8) で与えられる。後に述べるように、配位 (4.30) についての電荷演算子  $T'$  は (4.53) の第 1 式のように書くことができる。その可換極限は次式のようになる。

$$T' \rightarrow \frac{h}{|h|} n \cdot \tau. \quad (4.35)$$

ここで  $n_i = x_i/|x|$  は球面の垂直成分の単位ベクトルである。その時、(4.3) から、規格化されたスカラー場は

$$2\phi' = \frac{h}{|h|} n \cdot \tau \quad (4.36)$$

で与えられる。(3.22) や (4.30) から、

$$D'_{\text{com}} = \sigma \cdot \mathcal{L} + 1 + h \frac{1}{2} (\sigma \cdot \tau - (n \cdot \sigma)(n \cdot \tau)) \quad (4.37)$$

を得る。

それゆえ、 $D'_{\text{GW}}$  の可換極限は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{2\phi', D'_{\text{com}}\} &= \frac{1}{2} \frac{h}{|h|} \left( \{n \cdot \tau, \sigma \cdot \mathcal{L} + 1\} + h \frac{1}{2} \{n \cdot \tau, \sigma \cdot \tau - (n \cdot \sigma)(n \cdot \tau)\} \right) \\ &= \frac{h}{|h|} (n \cdot \tau) D_{\text{com}}^{!m=1}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

ここで、

$$D_{\text{com}}^{!m=1} = \sigma \cdot \mathcal{L} + 1 + \frac{1}{2} (\sigma \cdot \tau - (n \cdot \sigma)(n \cdot \tau)) \quad (4.39)$$

は TP モノポール配位 (3.25) に関して (3.22) により定義されたディラック演算子である。ただし、ここでは  $\{n \cdot \tau, \sigma \cdot \tau - (n \cdot \sigma)(n \cdot \tau)\} = 0$  の関係式を用いた。この関係式のために、(4.38) の  $h/|h|$  の因子を除いて、 $h$  依存性はなくなる。

以下に続く副節では、非可換理論においても同様に同じ結果を得ることを示す。



## 4.2.2 非可換理論におけるトポロジカル・チャージ

まず初めに、 $h \sim \mathcal{O}(1)$  の配位 (4.29) に関して、簡単に  $\frac{1}{4}\mathcal{T}r(\Gamma' + \hat{\Gamma}') = -h/|h|$  を得られることに注目する。 $\rho a_i = \tau_i/2$  は許容条件を満たすので、4.1.3 節の議論から、 $\frac{1}{4}\mathcal{T}r(\Gamma' + \hat{\Gamma}')$  は任意の  $h \sim \mathcal{O}(1)$  について定数値をとる。その上、 $h = 1$  に関して  $\frac{1}{4}\mathcal{T}r(\Gamma' + \hat{\Gamma}') = -1$  なので、前述の結果を得ることができる。これは可換理論での結果 (4.34) と一致する。以下では、 $h \sim \mathcal{O}(1)$  に限らず任意の実数  $h$  の配位に関して、非可換理論での具体的な計算を行う。

### $\hat{\Gamma}$ の計算

まず、カイラリティ演算子 (3.16) について考える。演算子

$$H = \sigma \cdot L + \frac{h}{2} \sigma \cdot \tau + \frac{1}{2} \quad (4.40)$$

は全スピン演算子

$$J_i = L_i + \frac{\sigma_i}{2} + \frac{\tau_i}{2} \quad (4.41)$$

と交換するので、任意の実数  $h$  に関して

$$[J_i, \hat{\Gamma}] = 0 \quad (4.42)$$

が満たされる。したがって、 $J_i$  と  $\hat{\Gamma}$  との同時固有状態が存在する：

$$(J_i)^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle, \quad (4.43)$$

$$J_3 |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad (4.44)$$

$$\hat{\Gamma} |j, m\rangle = \pm |j, m\rangle. \quad (4.45)$$

$\hat{\Gamma}$  の固有値は、 $|j, m\rangle$  の各多重項で同じ値をとる。

したがって、下式が得られる。

$$\begin{aligned} & \langle j, m | \hat{\Gamma}(h) | j, m \rangle \\ &= \begin{pmatrix} c_{l+1}(h) \mathbf{1}_{2l+3} & & \\ & U(h) \begin{pmatrix} c_l^1(h) & 0 \\ 0 & c_l^2(h) \end{pmatrix} U^\dagger(h) \otimes \mathbf{1}_{2l+1} & \\ & & c_{l-1}(h) \mathbf{1}_{2l-1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$c_j(h)$  は、 $|j, m\rangle$  の各多重項における  $\hat{\Gamma}(h)$  の固有値を表す。ここで、 $n = 2l + 1$  のように  $l$  を導入する。 $j = l$  で 2 重に縮退しているため、固有状態は固定した基底  $|j, m\rangle$  からのユニタリー変換  $U(h)$  により与えられる。(4.40) の演算子がゼロモードを持たないので、 $\hat{\Gamma}(h)$  は  $h$  の連続関数  $c_j(h)$  である。その上さらに、 $c_j(h)$  は 1 か  $-1$  のいずれかの値をとる。したがって、 $c_j(h)$  は  $h$  と関係なく定数値をとる。

$h = 0$  に関して、 $\hat{\Gamma}$  は演算子  $L_i + \frac{\sigma_i}{2}$  で対角化され、 $(c_{l+1}, c_l^1, c_l^2, c_{l-1}) = (1, 1, -1, -1)$  が簡単に得られる。 $h = 1, \pm\infty$  に関して、同様の計算が実行できる。さらに、 $H(4.40)$  につい

てゼロモードを調べることができる。付録 E で述べるように、 $j = l + 1$  の状態が  $h = -n$  のゼロモードになり、 $j = l - 1$  の状態は  $h = n$  でゼロモードになる。 $j = l$  の状態は  $h$  の任意の値でゼロモードにならない。

結果として、 $\hat{\Gamma}(h)$  は

$$(c_{l+1}, c_l^1, c_l^2, c_{l-1}) = \begin{cases} (-1, 1, -1, -1) & h < -n \text{ の場合,} \\ (1, 1, -1, -1) & -n < h < n \text{ の場合,} \\ (1, 1, -1, 1) & n < h \text{ の場合} \end{cases} \quad (4.47)$$

で、(4.46) の形を持つ。よって、

$$\mathcal{T}r(\hat{\Gamma}) = \begin{cases} 4n & |h| < n \text{ の場合,} \\ 2n^2 \frac{h}{|h|} & |h| > n \text{ の場合} \end{cases} \quad (4.48)$$

が得られる。

いま、射影演算子や電荷演算子を導入しない単純なトポロジカル・チャージに関して、いくつかのコメントする。そのトポロジカル・チャージは、

$$\frac{1}{2}\mathcal{T}r(\Gamma + \hat{\Gamma}) = \begin{cases} 0 & |h| < n \text{ の場合,} \\ n^2 \frac{h}{|h|} - 2n & |h| > n \text{ の場合} \end{cases} \quad (4.49)$$

のようになる。任意の許容された配位に関して 4.1.3 節と同様の議論から、 $\frac{1}{2}\mathcal{T}r(\Gamma + \hat{\Gamma})$  は  $a_i = 0$  の場合と同じ値をとり、したがって  $\frac{1}{2}\mathcal{T}r(\Gamma + \hat{\Gamma}) = 0$  となる。(4.49) の 1 行目はこの事実と一致する。その上、(4.49) の 1 行目はこの結果が配位空間のかなり大きな領域で、 $h \sim n$  の許容されない領域でさえ保たれることを示している。一方で、(4.49) の 2 行目はトポロジカル・チャージが配位空間の許容されない領域についてゼロでない値をとり得ることを示している。

実際に、トポロジカル・チャージ  $\frac{1}{2}\mathcal{T}r(\Gamma + \hat{\Gamma})$  は様々な配位に関して様々な整数値をとり、一方で、許容条件を課した後でトポロジカルに自明な領域のみが残される。非可換トーラスでも、同様の結果が得られている [41]。この状況は可換理論の場合と著しく異なっている。通常の格子ゲージ理論において、許容条件を課した後でさえすべてのトポロジカル・セクターが残ったままになる。この不一致は以下のように説明できる：非自明なトポロジエを持つ配位は 3 つの方法で表される。1 つ目の方法は、特異な配位を考えてその特異点に非自明な配位を置くことである。2 つ目の方法は、ねじれた境界条件を持つ理論を考えるか、パッチの概念を導入することである。そして 3 つ目の方法はゲージ対称性の自発的対称性の破れを使うことである。しかしながら、非可換多様体は配位の特異点をぼかすので、1 つ目の方法を禁じてしまう。したがって、自明な境界条件を特定するならば自明なトポロジカル・セクターのみが存在できるようになる。

これは単純なトポロジカル・チャージ  $\frac{1}{2}\mathcal{T}r(\Gamma + \hat{\Gamma})$  を考えた場合である。第 4.1 節でのように射影演算子を導入するならば、許容された配位の中で非自明なトポロジエを得ることができる。ねじれた境界条件を持つ非可換ゲージ理論は、[42] でのように有限サイズの行列模型によっても定式化できる。その上さらに、自発的に対称性が破れたゲージ理論でスカラー場の巻き付き数によってトポロジエを表すことにより、1 つの理論からすべてのトポロジカル・セクターを定義することができる。

$\hat{\Gamma}'$  の計算

まず最初に、配位 (4.29) について (4.1) の電荷演算子  $T'$  を考える。

$$(A_i)^2 - (L_i)^2 = hL \cdot \tau + \frac{3}{4}h^2 \quad (4.50)$$

を使うと、

$$T' = \frac{h}{|h|} \frac{L \cdot \tau + \frac{3}{4}h}{\sqrt{\left(L \cdot \tau + \frac{3}{4}h\right)^2}} \quad (4.51)$$

を得る。 $L_i + \frac{\tau_i}{2}$  の  $n \pm 1$  次元既約表現に関して、演算子  $L \cdot \tau$  は次の値をとる：

$$\begin{aligned} L \cdot \tau &= \left(L_i + \frac{\tau_i}{2}\right)^2 - (L_i)^2 - \left(\frac{\tau_i}{2}\right)^2 \\ &= \begin{cases} \frac{2n-2}{4} & n+1 \text{ 次元表現の場合,} \\ \frac{-2n-2}{4} & n-1 \text{ 次元表現の場合.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$n+1$  次元表現においては、 $T' = \frac{h}{|h|} \frac{2n-2+3h}{|2n-2+3h|}$  となり、そのとき  $h > \frac{-2n+2}{3}$  に関して  $T' = \frac{h}{|h|}$  となる。また、 $n-1$  次元表現では、 $T' = \frac{h}{|h|} \frac{-2n-2+3h}{|-2n-2+3h|}$  となり、 $h < \frac{2n+2}{3}$  に関して  $T' = -\frac{h}{|h|}$  となる。それゆえ、 $T'$  は次のように書くことができる。

$$T' = \begin{cases} \frac{h}{|h|} \frac{2}{n} \left(L \cdot \tau + \frac{1}{2}\right) & \frac{-2n+2}{3} < h < \frac{2n+2}{3} \text{ の場合,} \\ 1 & \text{その他の } h \text{ の場合} \end{cases} \quad (4.53)$$

その上、 $T'$  は (4.41) で定義された全スピン演算子  $J_i$  と交換し、(4.53) の 1 行目は  $\frac{h}{|h|}$  倍した  $(c_{l+1}, c_l^1, c_l^2, c_{l-1}) = (1, 1, -1, -1)$  の (4.46) の形として書き直される。 $T'$  や  $\hat{\Gamma}'$  の値を図 4.1 にまとめる。

次に、(4.5) の一般化したカイラリティ演算子を考える。 $h > \frac{2n+2}{3}$  や  $h < \frac{-2n+2}{3}$  に関して、 $\hat{\Gamma}'$  は  $\hat{\Gamma}$  になり、その形は (4.47) で既に与えられている。 $\frac{-2n+2}{3} < h < \frac{2n+2}{3}$  に関して、ゼロモードは  $j=l$  領域の  $T'$  や  $\hat{\Gamma}'$  の反交換関係から生じるかもしれない。付録 E で示すように、そのようなゼロモードは生じない。結果として、 $\frac{-2n+2}{3} < h < \frac{2n+2}{3}$  に関して下式を得る。

$$\langle j, m | \hat{\Gamma}'(h) | j, m \rangle = \frac{h}{|h|} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2l+3} & & & \\ & -\mathbf{1}_{2l+1} & & \\ & & -\mathbf{1}_{2l+1} & \\ & & & \mathbf{1}_{2l-1} \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

これは、 $h/|h|$  の部分を除いて  $h$  に独立している。

ここまでで  $T'$  や  $\hat{\Gamma}'$  の値が終わったので、 $\frac{1}{4} \text{Tr}(\Gamma' + \hat{\Gamma}')$  を簡単に評価できる。その結果を表 4.1 や図 4.2 にまとめる。特に、 $\frac{-2n+2}{3} < h < \frac{2n+2}{3}$  に関して以下の結果を得る。

$$\frac{1}{4} \text{Tr}[\Gamma' + \hat{\Gamma}'] = -\frac{h}{|h|}. \quad (4.55)$$

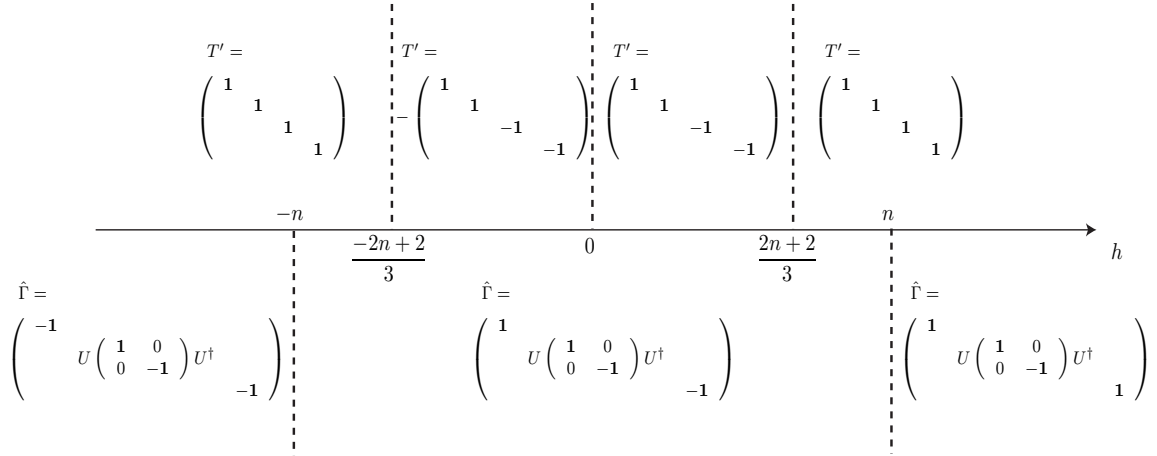


図 4.1: 各  $h$  における  $\hat{\Gamma}$ (4.47) や  $T'$ (4.53) の値。ここで、 $j = l$  の領域の基底は演算子  $L_i + \tau_i/2$  に関する固有状態とする。

$h$	$-n$	$\frac{-2n+2}{3}$	$0$	$\frac{2n+2}{3}$	$n$
$\mathcal{T}r(\Gamma')$	$-4n$	$4$	$-4$	$-4n$	
$\mathcal{T}r(\hat{\Gamma}')$	$-2n^2$	$4n$	$0$	$4n$	$2n^2$
$\frac{1}{4}\mathcal{T}r(\Gamma' + \hat{\Gamma}')$	$-\frac{1}{2}(n^2 + 2n)$	$0$	$1$	$-1$	$\frac{1}{2}(n^2 - 2n)$

表 4.1: 任意の実数  $h$  に関する配位 (4.29) のトポロジカル・チャージ  $\frac{1}{4}\mathcal{T}r[\Gamma' + \hat{\Gamma}']$ 。

第 4.2.2 節の初めで言及したように、第 4.1.3 節の  $h \sim \mathcal{O}(1)$  に関する議論から得ることができる。また、正負のトポロジカル・チャージを得たことにも注目すべきで、(3.36) で指摘したように、以前の定式化では負のトポロジカル・チャージのみしか定義できなかった。その上、同様に許容されない領域に関する結果も得ることができた。(4.55) は  $h \sim \mathcal{O}(n)$  の許容されていない領域でさえ有効であるが、 $h$  の値をさらに拡張すれば、その値は変化する。

カイラリティ演算子  $\hat{\Gamma}'$  (4.54) は前因子を除いて  $h$  に独立なので、次のように書くことができる。

$$\hat{\Gamma}'(h) = \frac{h}{|h|} \hat{\Gamma}'(h=1) = T'(h) \hat{\Gamma}(h=1). \quad (4.56)$$

また、カイラリティ演算子  $\Gamma'$  は次のように書かれる。

$$\Gamma'(h) = T'(h) \Gamma. \quad (4.57)$$

それゆえ、GW ディラック演算子は (4.7) は  $\frac{-2n+2}{3} < h < \frac{2n+2}{3}$  に関して以下のようになる。

$$D'_{GW} = T'(h) D_{GW}^{m=1}. \quad (4.58)$$

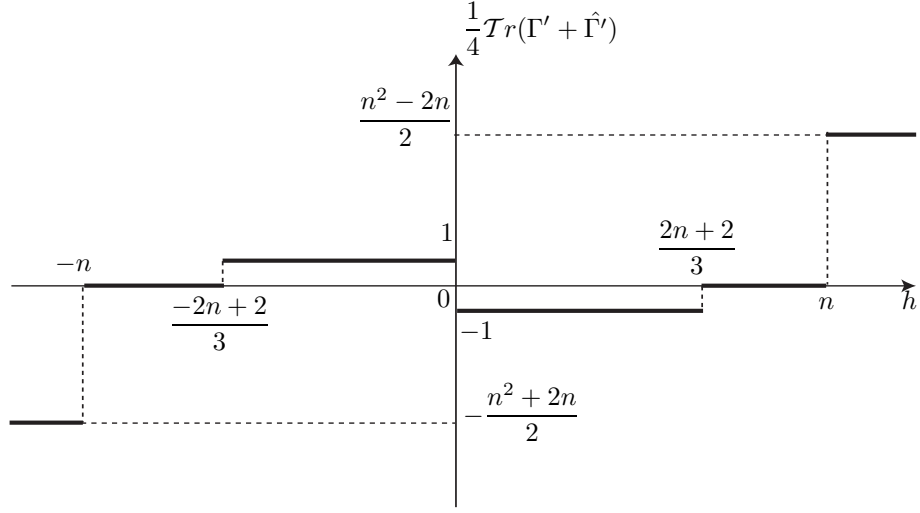


図 4.2: 各  $h$  の値におけるトポロジカル・チャージ  $\frac{1}{4}\text{Tr}[\Gamma' + \hat{\Gamma}']$ 。

ここで、 $D_{GW}^{m=1}$  は  $m = 1$  の磁荷を持つ TP モノポール配位 (3.24) についての以前の定義 (3.19) である<sup>1</sup>。  $D_{GW}^{m=1}$  は  $h$  に独立である。  $T'(h)$  は (4.53) で与えられている。この結果 (4.57) は可換理論の場合の (4.38) と一致する。

今、GW ディラック演算子 (4.58) についての簡単な表式を得たので、[16] で配位 (3.23) に関して行ったように、配位 (4.29) のディラック演算子についてのスペクトルのような様々な量を簡単に計算することが出来る。

<sup>1</sup>ついでに言えば、 $D_{GW}^{m=1}$  は  $D_{GW}^{m=1} = \sigma \cdot \tilde{L} + 1 + \frac{1}{2}\sigma \cdot \tau - \frac{1}{n^2-1}L \cdot \tau [1 + 2\sigma \cdot (L + \frac{\tau}{2})]$  のように書くことができる。

## 第5章 非可換 $2 \times 2$ 次元球面 $S_F^2 \times S_F^2$ 上への 拡張

### 5.1 ディラック演算子の構成とインデックス定理

この節では、非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  上のディラック演算子とそれに対応するトポロジカル・チャージを構成する。

非可換  $2$  次元球面  $S_F^2$  でのように、始めに  $2$  つのカイラリティ演算子を次のように定義する：

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2, \quad (5.1)$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{\{\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2\}}{\sqrt{\{\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2\}^2}}. \quad (5.2)$$

$\Gamma_X$  や  $\hat{\Gamma}_X$  は、 $X = 1, 2$  でラベル付けされた各非可換  $2$  次元球面  $S_F^2$  上のカイラリティ演算子であり、それぞれは (3.15) や (3.16) で定義されているように、

$$\Gamma_X = a \left( \sigma_i L_i^R - \frac{1}{2} \right)_X, \quad (5.3)$$

$$\hat{\Gamma}_X = \frac{H_X}{\sqrt{H_X^2}} \quad (5.4)$$

で表される。ここで、(3.17) より演算子  $H_X$  は

$$H_X = a \left( \sigma_i A_i + \frac{1}{2} \right)_X \quad (5.5)$$

で表され、配位  $A_i$  は (3.9) で定義したように

$$(A_i)_X = (L_i + \rho a_i)_X \quad (5.6)$$

である。簡単のために、ここでは  $2$  つの球面の半径  $\rho_X$  は等しいとする ( $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$ )。ゲージ場  $(a_i)_X$  の添え字  $i$  は  $X$  によりラベル付けされた各球面を参照する一方で、ゲージ場は両方の非可換球面  $S_F^2$  の座標  $(L_i)_1$  や  $(L_i)_2$  に依存している。

(5.3) や (5.4) から、

$$[\Gamma_1, \Gamma_2] = [\Gamma_1, \hat{\Gamma}_2] = [\hat{\Gamma}_1, \Gamma_2] = 0 \quad (5.7)$$

となる。また、(3.18) から

$$\{\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2\}^2 = 4 + [\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2]^2 \quad (5.8)$$

を示すことも出来る。ここで、(5.8) の第 2 項は (F.8) で見たように  $\mathcal{O}(n^{-4})$  のオーダーである。

各球面上のカイラリティ演算子の関係 (3.18) から、 $S_F^2 \times S_F^2$  上のカイラリティ演算子 (5.1) や (5.2) は同じ関係式を満たす。

$$(\Gamma)^\dagger = \Gamma, \quad (\hat{\Gamma})^\dagger = \hat{\Gamma}, \quad (\Gamma)^2 = (\hat{\Gamma})^2 = 1. \quad (5.9)$$

可換理論において、 $\Gamma$  と  $\hat{\Gamma}$  の両方の演算子は可換な  $S^2 \times S^2$  上で同じカイラリティ演算子である  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$  になる。(5.8) の第 2 項は  $\mathcal{O}(n^{-4})$  のふるまいをするので、(5.2) の可換極限に寄与しない。しかしながら、この項はトポロジカル・チャージの可換極限を計算するのに関係することに注目すべきである。

次に、GW ディラック演算子を下式のように定義する。

$$D_{\text{GW}} = -a^{-1}(\Gamma - \hat{\Gamma}). \quad (5.10)$$

この定義により、GW 関係式

$$\Gamma D_{\text{GW}} + D_{\text{GW}} \hat{\Gamma} = 0 \quad (5.11)$$

やインデックス定理

$$\text{index}(D_{\text{GW}}) = \frac{1}{2} \text{Tr}[\Gamma + \hat{\Gamma}] \quad (5.12)$$

が満たされる。ここで、 $\text{Tr}$  は全配位空間のトレース、すなわち、両球面のスピノルの足、ゲージ群の足、および座標  $(L_i)_1$  や  $(L_i)_2$  の多項式の行列空間のトレースを意味する。

ディラック演算子の可換極限は簡単に得ることができる。

$$\Gamma_1 \Gamma_2 - \hat{\Gamma}_1 \hat{\Gamma}_2 = \frac{1}{2} \left[ (\Gamma_1 - \hat{\Gamma}_1)(\Gamma_2 + \hat{\Gamma}_2) + (\Gamma_1 + \hat{\Gamma}_1)(\Gamma_2 - \hat{\Gamma}_2) \right] \quad (5.13)$$

と (3.22) を使うと、可換極限では GW ディラック演算子 (5.10) は

$$D_{\text{GW}} \rightarrow D'_1 \gamma_2 + \gamma_1 D'_2 \quad (5.14)$$

となることを示すことができる。ここで、 $D'_X$  や  $\gamma_X$  は各球面上のディラック演算子とカイラリティ演算子である。これは、可換な  $S^2 \times S^2$  上の通常のディラック演算子ではない。<sup>1</sup> しかしながら、後に示すように、ディラック演算子 (5.10) は非可換  $S_F^2 \times S_F^2$  上のトポロジカル・チャージを定義するのに十分である。

私達の定式化は、以下にあげるような良い特性を持つ。まず始めに、ゲージ変換

$$(A_i)_X \rightarrow U (A_i)_X U^\dagger \quad (5.15)$$

の下で、共通の  $U$  を持つ  $X = 1, 2$  の両方に関して、明白に共変的なことである。ここで、 $U$  とは 両球面の座標  $(L_i)_1$  や  $(L_i)_2$  に依存した一般のユニタリー行列である。2 つ目に、

<sup>1</sup>北極での平面極限  $(n_i)_{X=1} = (n_i)_{X=2} = \delta_{i,3}$  をとると、4 次元のガンマ行列は  $\gamma_1 = (\sigma_1)_{X=1}(\sigma_3)_{X=2}$ ,  $\gamma_2 = (\sigma_2)_{X=1}(\sigma_3)_{X=2}$ ,  $\gamma_3 = (\sigma_3)_{X=1}(\sigma_1)_{X=2}$ ,  $\gamma_4 = (\sigma_3)_{X=1}(\sigma_2)_{X=2}$ , となり、 $SO(4)$  クリフォード代数を満たさない。しかしながら、たとえば、そのとき可換極限で  $\tilde{\gamma}_1 = i(\sigma_2)_{X=1}(\sigma_3)_{X=2}$ ,  $\tilde{\gamma}_2 = -i(\sigma_1)_{X=1}(\sigma_3)_{X=2}$ ,  $\tilde{\gamma}_3 = (\sigma_1)_{X=2}$ ,  $\tilde{\gamma}_4 = (\sigma_2)_{X=2}$ , を与えるようにガンマ行列に左から  $(\sigma_3)_{X=1}$  を作用させるように、定義の左側から GW ディラック演算子 (5.10) に  $\Gamma_1$  を作用させると、 $SO(2, 2)$  クリフォード代数を満たす。

GW 関係式はインデックスやトポロジカル・チャージのトポロジ的な特性を保証する。最後に、この定式化は  $S^2 \times S^2$  上の明白な  $SO(3) \times SO(3)$  ポアンカレ不変性を持つ。これらの特性により、私達が定義したトポロジカル・チャージの可換極限は  $S^2 \times S^2$  上の第 1 チャーン指標と第 2 チャーン指標の和になるべきである。このことを次節で示す。

## 5.2 トポロジカル・チャージの可換極限

この節では、(5.12) の右辺で定義されたトポロジカル・チャージの可換極限を計算する。前節の終わりで議論したように、その結果は定数と第 1 チャーン指標と第 2 チャーン指標の線形結合になるべきである。

$\mathcal{T}r [\Gamma]$  は次のように簡単に計算できる：

$$\mathcal{T}r [\Gamma] = 4n^2 \text{tr} (1) . \quad (5.16)$$

ここで、 $\text{tr}$  はゲージ群の空間のトレースを表す。

一方で、 $\mathcal{T}r [\hat{\Gamma}]$  の計算はより複雑である。付録 G で示すように、ゲージ場で展開することによって、オーダー  $n^{-4}$  まで計算すると 5 つの項の和になる：

$$\mathcal{T}r [\hat{\Gamma}] = \mathcal{T}r \left[ \sum_{i=1}^5 G_i + \mathcal{O}(n^{-5}) \right] . \quad (5.17)$$

$\mathcal{T}r$  が  $n^4$  のオーダーの寄与を与えるので、 $\mathcal{O}(n^{-5})$  の項は可換極限で消える。各項は

$$G_1 = \alpha_1 \alpha_2 , \quad (5.18)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} \left( \{ \alpha_1, \zeta_2^{(1)} + \zeta_2^{(2)} \} + \{ \alpha_2, \zeta_1^{(1)} + \zeta_1^{(2)} \} \right) , \quad (5.19)$$

$$G_3 = \frac{1}{2} \left( \{ \alpha_1, \zeta_2^{(3)} \} + \{ \alpha_2, \zeta_1^{(3)} \} \right) , \quad (5.20)$$

$$G_4 = \frac{1}{2} \left( \{ \zeta_1^{(1)} + \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(1)} + \zeta_2^{(2)} \} \right) , \quad (5.21)$$

$$G_5 = -\frac{1}{8} \alpha_1 \alpha_2 \left( [\alpha_1, \zeta_2^{(1)}] - [\alpha_2, \zeta_1^{(1)}] + [\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}] \right)^2 \quad (5.22)$$

によって与えられ、 $\alpha_X$  や  $\zeta_X^{(i)}$  はゲージ場  $(a_i)_X$  の 0 次や  $i$  次のオーダーであり、(F.2) や (F.4)- (F.6) で定義されている。最後の項  $G_5$  は (5.2) の分母から生じる。カイラリティ演算子あるいはディラック演算子の可換極限に反して、分母からくる  $\mathcal{O}(n^{-4})$  のオーダーの項を考慮すべきである。

初項  $\mathcal{T}r [G_1]$  は

$$\mathcal{T}r [G_1] = 4n^2 \text{tr} (1) \quad (5.23)$$

のように定数になり、(5.16) と同じ値となる。 $\mathcal{T}r [G_2]$  の可換極限は非可換 2 次元球面  $S_F^2$  について (3.35) で行ったように計算でき、各球面上で第 1 チャーン指標に比例する項を与える：

$$\mathcal{T}r [G_2] \rightarrow 2n \cdot 2\rho^2 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \text{tr} (\epsilon_{abc} n_c F_{ab} + \epsilon_{ijk} n_k F_{ij}) . \quad (5.24)$$



ここで1つ目の  $S_F^2$  については  $a, b, c$ 、2つ目の  $S_F^2$  には  $i, j, k$  の添字を用いている。しかしながら、場の強さ  $F_{ab}(\Omega_1, \Omega_2)$  や  $F_{ij}(\Omega_1, \Omega_2)$  は、両方の  $S_F^2$  の座標に依存することに注意したい。この意味で、(5.24) は可換な  $S^2 \times S^2$  上で定義された一般化した第1チャーン指標を表す。(5.24) は  $n$  のオーダなので、 $G_2$  の  $n^{-1}$  での2番目に大きいオーダの項は有限な寄与を与える。 $Tr[G_3]$  の可換極限もまた、有限な寄与を与える。後で述べるような配位に関して  $Tr[G_3]$  の項は消えるので、この論文で具体的な形を述べないことにする。より一般的な配位に関するトポロジカル・チャージについての研究は今後の課題である。

$Tr[G_4]$  の可換極限もまた (3.35) でのように計算でき、次のようになる：

$$Tr[G_4] \rightarrow (2\rho^2)^2 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \text{tr}(\epsilon_{abc} n_c F_{ab} \epsilon_{ijk} n_k F_{ij}) . \quad (5.25)$$

驚くべきことに、付録 G で示すように、 $Tr[G_5]$  の可換極限は

$$Tr[G_5] \rightarrow -8\rho^4 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \text{tr}(\epsilon_{abc} n_c \epsilon_{ijk} n_k F_{ai} F_{bj}) \quad (5.26)$$

となる。異なる  $S_F^2$  の添字を持つ場の強さである  $F_{ai}$  や  $F_{bj}$  が、ここで生じることに注目したい。これらの2つの項を組み合わせることで、

$$Tr[G_4 + G_5] \rightarrow 4\rho^4 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \epsilon_{abc} n_c \epsilon_{ijk} n_k \text{tr}(F_{ab} F_{ij} - F_{ai} F_{bj} + F_{aj} F_{bi}) \quad (5.27)$$

を得ることができ、これが可換な  $S^2 \times S^2$  上の第2チャーン指標の積分を与える。

以上をまとめると、 $S_F^2 \times S_F^2$  上のトポロジカル・チャージの可換極限は次のようになる：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} Tr[\Gamma + \hat{\Gamma}] \\ \rightarrow & 4n^2 \text{tr}(\mathbf{1}) + 2n\rho^2 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \text{tr}(\epsilon_{abc} n_c F_{ab} + \epsilon_{ijk} n_k F_{ij}) \\ & + 2\rho^4 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \epsilon_{abc} n_c \epsilon_{ijk} n_k \text{tr}(F_{ab} F_{ij} - F_{ai} F_{bj} + F_{aj} F_{bi}) . \end{aligned} \quad (5.28)$$

微分形式では、これは

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int \text{tr} \left( n^2 d\Omega_1 d\Omega_2 + n(d\Omega_1 F_2 + d\Omega_2 F_1) + 2 \frac{1}{2!} (F^2)_{12} \right) \quad (5.29)$$

のように表される。ここで  $F_X$  は

$$F_X = \frac{1}{2} \rho^2 (d\Omega \epsilon_{ijk} n_k F_{ij})_X , \quad (5.30)$$

$$(F^2)_{XY} = \frac{2!}{2^2} \rho^4 d\Omega_X d\Omega_Y \left( \epsilon_{abc} n_c \epsilon_{ijk} n_k (F_{ab} F_{ij} - F_{ai} F_{bj} + F_{aj} F_{bi}) \right)_{XY} \quad (5.31)$$

であり、 $d\Omega_X$  は各  $S_F^2$  の体積形式である。平坦な極限では、 $F$  や  $F^2$  は各  $S^2$  や  $S^2 \times S^2$  のそれぞれの上でよく知られた形になる：

$$F_X \rightarrow \frac{1}{2} (F_{\mu\nu} dx_\mu \wedge dx_\nu)_X , \quad (5.32)$$

$$(F^2)_{XY} \rightarrow \frac{1}{2^2} (F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} dx_\mu \wedge dx_\nu \wedge dx_\lambda \wedge dx_\rho)_{XY} . \quad (5.33)$$

(5.28) や (5.29) の第 1 項、第 2 項はそれぞれ  $n^2$  や  $n$  に比例し、可換極限（ラージ  $n$  極限）で発散する。第 3 項は第 2 チャーン指標の 2 倍となり、GW ディラック演算子により定義したトポロジカル・チャージは  $S^2 \times S^2$  上の通常のディラック演算子のインデックスとは異なる。ディラック演算子が (5.14) の下で議論したような通常のディラック演算子と異なるからである。以下に続く節でカイラル・ゼロモードを分析することのより、(5.28) や (5.29) の各項の起源を議論する。

この方法を定義するトポロジカル・チャージが様々なトポロジカル不変物を含む一方で、第 2 チャーン指標を得ることができる。 $S^2 \times S^2$  上の第 2 チャーン指標との非可換な類似を定義するために、以下のような余分な部分を取り除く：

$$\frac{1}{4} \text{Tr} [\Gamma + \hat{\Gamma}] - \frac{1}{4n} \text{Tr} [\Gamma_1 + \hat{\Gamma}_1] - \frac{1}{4n} \text{Tr} [\Gamma_2 + \hat{\Gamma}_2] - \frac{1}{2n^2} \text{Tr} [\mathbf{1}] . \quad (5.34)$$

各項は非可換球面  $S_F^2 \times S_F^2$  上でトポロジカル不変であり、明確に定義されている。

### 5.3 カイラル・ゼロモード

この節では、ある特別な配位でのカイラル・ゼロモードの数を明確に計算し、可換極限でのトポロジカル・チャージである (5.28) や (5.29) と比較する。特に、インデックスがなぜ行列サイズ  $n$  に依存するのかということについて議論する。

#### 5.3.1 相互作用がない場合のカイラル・ゼロモード

まずはじめに、ゲージ場が消えるとい相互作用がない場合についての GW ディラック演算子のカイラル・ゼロモードを分析する。ゲージ場が存在しない場合でさえ、GW 関係式のカイラル・ゼロモードは存在し、それらは (5.28) や (5.29) の第 1 項を与える。ここでは簡単のために  $U(1)$  ゲージ群を考える。

相互作用がない場合には  $[\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2] = 0$  という簡単な関係になり、カイラリティ演算子 (5.2) は  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1 \hat{\Gamma}_2$  のように簡単になる。(5.13) を使うと、GW ディラック演算子 (5.10) もまた

$$D_{\text{GW}} = D_1 + D_2 \quad (5.35)$$

のように簡単に表される。ここで、 $D_1$  や  $D_2$  は

$$D_1 = -\frac{1}{2} a^{-1} (\Gamma_1 - \hat{\Gamma}_1) (\Gamma_2 + \hat{\Gamma}_2) , \quad D_2 = -\frac{1}{2} a^{-1} (\Gamma_1 + \hat{\Gamma}_1) (\Gamma_2 - \hat{\Gamma}_2) \quad (5.36)$$

である。(5.7) や  $[\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2] = 0$ 、(3.18) を使うと、各  $D_a$  についての以下の GW 関係式を簡単に示すことができる：

$$\Gamma D_1 + D_1 \hat{\Gamma} = 0 , \quad \Gamma D_2 + D_2 \hat{\Gamma} = 0 . \quad (5.37)$$

ここで、 $\Gamma$  や  $\hat{\Gamma}$  は (5.1) や (5.2) で定義した非可換球面  $S_F^2 \times S_F^2$  上のカイラリティ演算子である。さらに

$$[D_1, D_2] = 0 . \quad (5.38)$$

を示すこともできる。

いま、ディラック演算子  $D_{GW}$  の固有値 0 の状態を考える。GW 関係式 (5.11) のおかげで、カイラリティ演算子はこの空間で対角化することができる。したがって、

$$D_{GW}|\psi\rangle = 0, \quad \Gamma|\psi\rangle = \hat{\Gamma}|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle. \quad (5.39)$$

を満たす状態  $|\psi\rangle$  を考える。(5.37) や (5.38) から、 $a = 1, 2$  に関して

$$D_{GW}D_a|\psi\rangle = 0, \quad \Gamma D_a|\psi\rangle = \hat{\Gamma}D_a|\psi\rangle = \mp D_a|\psi\rangle \quad (5.40)$$

となる。それゆえ、 $D_1|\psi\rangle \neq 0$  か  $D_2|\psi\rangle \neq 0$  のどちらも満たされない場合、 $D_{GW}$  のインデックスへの寄与は  $|\psi\rangle$  や  $D_a|\psi\rangle$  によって互いにキャンセルされる。したがって、インデックスに寄与できるカイラル・ゼロモードは  $D_1|\psi\rangle = 0$  や  $D_2|\psi\rangle = 0$  の関係式を満たさなければならない。 $[\Gamma_1 - \hat{\Gamma}_1, \Gamma_2 + \hat{\Gamma}_2] = 0$  のおかげで、(5.36) から、 $D_1$  のゼロモードは  $\Gamma_1 - \hat{\Gamma}_1$  か  $\Gamma_2 + \hat{\Gamma}_2$  のゼロモードにより与えられる。同様に、 $D_2$  のゼロモードは  $\Gamma_1 + \hat{\Gamma}_1$  か  $\Gamma_2 - \hat{\Gamma}_2$  のゼロモードにより与えられる。

演算子  $(\Gamma_X \pm \hat{\Gamma}_X)$  のゼロモードを見つけるために、各球面  $S_F^2$  を別々に考える。私達の定式化は各球面  $S_F^2$  上で  $SO(3)$  ポアンカレ対称性を持ち、その生成子は次のように書くことができる：

$$(M_i)_X = \left( L_i - L_i^R + \frac{\sigma_i}{2} \right)_X. \quad (5.41)$$

そのとき、カシミア演算子  $\sum_i (M_i)_X^2$  の固有状態は

$$\sum_i (M_i)_X^2 |J_X\rangle = J_X(J_X + 1) |J_X\rangle \quad (5.42)$$

とみなされる。(5.41) の  $SU(2)$  代数から、スピン  $J_X$  は  $J_X = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n - \frac{1}{2}$  の値をとることを示すことができる。状態  $|J_X\rangle$  にはいくつかの縮退が存在する。 $(M_3)_X$  に関する  $(2J_X + 1)$  重縮退に加えて、状態  $|J_X\rangle$  は  $J_X = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n - \frac{3}{2}$  に関して 2 重縮退を持つ。しかしながら、 $J_X = n - \frac{1}{2}$  の最高スピン状態はこの 2 重縮退を持たない。補足 H で詳細を述べるように、各  $S^2$  上のディラック演算子  $(\Gamma - \hat{\Gamma})_X$  は相互作用がない場合に全くゼロモードを持たない。一方で、演算子  $(\Gamma + \hat{\Gamma})_X$  は  $J_X = n - \frac{1}{2}$  の最高スピン状態でゼロモードを持つのである。(H.9) の下の記述参照。) 私達はまた  $\Gamma_X |J_X = n - \frac{1}{2}\rangle = -\hat{\Gamma}_X |J_X = n - \frac{1}{2}\rangle = -|J_X = n - \frac{1}{2}\rangle$  を示すこともできる。

それゆえ、非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  に戻ると、ディラック演算子  $D_{GW}$  のカイラル・ゼロモードは  $J_1 = J_2 = n - \frac{1}{2}$  の最高スピン状態により与えられる。(5.1) や (5.2) の固有値により定義されるカイラリティはこれらのすべての状態に関して 1 である。これらの状態の縮退は  $(2J_1 + 1)(2J_2 + 1) = 4n^2$  であり、実際に (5.28) の第 1 項を与える。

可換極限において、演算子  $(\Gamma + \hat{\Gamma})_X$  は各  $S^2$  上のカイラリティ演算子に比例し、ゼロモードを持たない。非可換  $2$  次元球面  $S_F^2$  の場合には、最高スピン状態は GW ディラック演算子 (3.19) のゼロでない固有値を持ち、インデックスに寄与しない<sup>2</sup>。しかしながら、前述したように、非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  で、これらの状態は演算子  $(\Gamma + \hat{\Gamma})_X$  を含むので、ディラック演算子 (5.35) のゼロモードになる。これが、相互作用がない場合でさえ、ディラック演算子により定義されたトポロジカル・チャージで消えない項が残るという理由である。

<sup>2</sup>最高スピン状態は明確なカイラリティを持つディラック演算子のゼロ固有値を持つ [28] が、[29] で導入されたディラック演算子や GW ディラック演算子 (3.19) のゼロでない固有値を持つ。

### 5.3.2 モノポール配位とカイラル・ゼロモード

この節では、トポロジカルに非自明なゲージ場の配位としてモノポール配位を考える。私達は、修正したインデックス定理や、そのような配位に関して非自明な値を与えるトポロジカル・チャージも導入する。また、これらの背景場でGW ディラック演算子のカイラル・ゼロモードを分析する。

非可換球面  $S_F^2$  の場合、ゲージ群が  $U(2)$  から  $U(1) \times U(1)$  に自発的に破れるトーフフト・ポリヤコフ・モノポール配位を構成した [15, 16, 18, 35]。対角化された  $U(1)$  は可換極限で分離しているので、以下ではゲージ群の  $SU(2)$  部分のみ議論する。 $SU(2)$  ゲージ群が  $U(1)$  に破れるとき、この配位は  $S^2$  上の消えない真空期待値をもつスカラー場とモノポール・ゲージ場の配位の両方を含むトーフフト・ポリヤコフ型のモノポールとして解釈される。

同様に、今、非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  上の  $U(2) \times U(2)$  理論を考える。モノポール配位の存在の下で、ゲージ群は  $SU(2) \times SU(2)$  から  $U(1) \times U(1)$  へ自発的に破れる。私達が分析するモノポール配位は次のようなものである：

$$(A_a)_1 = L_a \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_n \otimes \frac{\tau_a}{2} \otimes \mathbf{1}_2 \doteq \begin{pmatrix} L_a^{(n+1)} & \\ & L_a^{(n-1)} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_2, \quad (5.43)$$

$$(A_i)_2 = L_i \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_2 \otimes \frac{\tau_i}{2}. \quad (5.44)$$

ここで、 $(A_a)_1$  や  $(A_i)_2$  は1つ目や2つ目の球面の共変座標である。テンソル積の2番目や3番目の因子は、それぞれ  $SU(2) \times SU(2)$  ゲージ群での各  $SU(2)$  のスピン  $1/2$  表現を意味する。等号  $\doteq$  はユニタリー同値であることを意味し、1つ目の空間と2つ目の空間、すなわち座標で表した行列空間と最初の  $SU(2)$  の空間を1つの行列表現に結びつける。 $(A_i)_2$  も同様に書くことができる。それぞれの配位は各  $S^2$  上のトーフフト・ポリヤコフ型モノポールを表し、 $S^2$  を包んでいる。 $S^2 \times S^2$  上の2つのスカラー場と解釈されるゲージ場の垂直成分は、有限な真空期待値を持ち、ゲージ対称性を破る。

より一般的に、つぎのようなタイプの配位を考えることができる：

$$(A_a)_1 = \begin{pmatrix} L_a^{(n+m_1)} & \\ & L_a^{(n-m_1)} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_2. \quad (5.45)$$

一般化した  $(A_i)_2$  も同様に書くことができる。そのような配位に関して、関係式  $[(A_a)_1, (A_i)_2] = 0$  は満たされる。

これらはトポロジカルに非自明な配位の非可換の類似であるが、(5.12) で定義したトポロジカル・チャージはこれらの配位に関して消える。このことは次のように理解できる：モノポール配位の存在下で、ゲージ群は  $SU(2) \times SU(2)$  から  $U(1) \times U(1)$  に自発的に破れる。各  $SU(2)$  の基本表現でのフェルミオン場は破れずに残った  $U(1)$  成分のそれぞれの反対の電荷  $\pm 1/2$  を持つ2つのフェルミオンに分解し、トポロジカル・チャージ、あるいはディラック演算子のインデックスを相殺する。

したがって、電荷  $\pm 1/2$  を持つフェルミオンの片方を取り上げるように、インデックス定理 (5.12) を修正しなければならない。第 3.2.2 節で示したように、射影空間で次のよう

なインデックス定理を証明できる：

$$\text{index} \left( P_1^{(n \pm m_1)} P_2^{(n \pm m_2)} D_{\text{GW}} \right) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ P_1^{(n \pm m_1)} P_2^{(n \pm m_2)} (\Gamma + \hat{\Gamma}) \right]. \quad (5.46)$$

ここで  $P_X^{(n \pm m_X)}$  は (5.45) の  $n \pm m_X$  次元を持つヒルベルト空間上の射影演算子である。射影演算子は

$$P_X^{(n \pm m_X)} = \frac{1}{2} (1 \pm T_X) \quad (5.47)$$

と書くことができ、そこで  $T_X$  は

$$T_X = \frac{2}{nm_X} \left( (A_X)^2 - \frac{n^2 + m_X^2 - 1}{4} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n+m_X} & \\ & -\mathbf{1}_{n-m_X} \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

である。ここで余分な  $1_2$  は省略している。演算子  $T_X$  は破れずに残った  $U(1)$  ゲージ群の電荷演算子として解釈される。その可換極限は

$$T_X \rightarrow 2\phi'_X \quad (5.49)$$

のように規格化されたスカラー場になる。ここで、 $\sum_a (\phi'_X)^a = 1$  であり、 $\phi'_X = \phi'_X \frac{\tau^a}{2}$  である。一般性を失わないように、今後は  $m_X > 0$  の次のような射影のみを考える：

$$P_X^{(n+m_X)} \equiv P_X. \quad (5.50)$$

第 5.2 節で (5.28) を導いたのと同じ計算で、(5.46) の右辺の可換極限は次のようになる：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr} [P_1 P_2 (\Gamma + \hat{\Gamma})] \\ & \rightarrow 4(n+m_1)(n+m_2) \\ & \quad + 2(n+m_1)\rho^2 \int \frac{d\Omega_2}{4\pi} \epsilon_{ijk} n_k \text{tr}_2(\phi'_2 F_{ij}) + 2(n+m_2)\rho^2 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \epsilon_{abc} n_c \text{tr}_1(\phi'_1 F_{ab}) \\ & \quad + 2\rho^4 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \epsilon_{abc} n_c \epsilon_{ijk} n_k \text{tr}_1(\phi'_1 F_{ab}) \text{tr}_2(\phi'_2 F_{ij}). \end{aligned} \quad (5.51)$$

ここで、 $\text{tr}_X$  は  $SU(2)_X$  ゲージ群のトレースを意味する。モノポール配位 (5.45) はモノポール数  $(-m_X)$  を持ち、(5.55) の下で見たように、各  $S^2$  上の第 1 チャーン指標は  $(-m_X)$  になる。その時、(5.51) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & 4(n+m_1)(n+m_2) + 2(n+m_1)(-m_2) + 2(n+m_2)(-m_1) + 2(-m_1)(-m_2) \\ & = 4n^2 + 2n(m_1+m_2) + 2m_1m_2. \end{aligned} \quad (5.52)$$

以下では、行列レベル、すなわち可換極限をとる前に (5.46) の両辺を計算し、その結果が (5.52) と一致することを調べる。そのとき、どのような種類のカイラル・ゼロモードが (5.51) の各項に寄与するかを調べる。

まず始めに、(5.46) の右辺を計算する。関係式  $[(A_a)_1, (A_i)_2] = 0$  より、

$$\frac{1}{2} \left( \text{Tr}_1 [P_1 \hat{\Gamma}_1] \text{Tr}_2 [P_2 \hat{\Gamma}_2] + \text{Tr}_1 [P_1 \hat{\Gamma}_1] \text{Tr}_2 [P_2 \hat{\Gamma}_2] \right) \quad (5.53)$$

と表すことができ、各因子は次のように評価できる。

$$\text{Tr}_X[P_X\Gamma_X] = -2(n + m_X), \quad \text{Tr}_X[P_X\hat{\Gamma}_X] = 2n. \quad (5.54)$$

演算子  $\Gamma_X$  は、演算子  $-L_i^R + \sigma_i/2$  の  $n \mp 1$  次元表現空間で固有値  $\pm 1$  をとる。  $PA_i$  が作用する空間も含め、空間の全次元を数えることにより、最初の結果を得ることができる。2番目の結果は簡単に得ることができる。そのとき、各  $S^2$  上のモノポール・チャージが得られる。

$$\frac{1}{2}\text{Tr} \left[ P_X(\Gamma_X + \hat{\Gamma}_X) \right] = -m_X. \quad (5.55)$$

(5.54) を (5.53) に代入すると、

$$\frac{1}{2} \left( (-2(n + m_1))(-2(n + m_2)) + (2n)^2 \right) \quad (5.56)$$

を得る。実際に、可換極限 (5.52) では上記の計算結果と一致する。

次に、モノポール背景場での GW ディラック演算子のカイラル・ゼロモードを数えることにより、(5.46) の左辺を計算する。  $[(A_a)_1, (A_i)_2] = 0$  により、可換性  $[\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2] = 0$  が有効である。そのとき、カイラリティ演算子 (5.2) は  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_1\hat{\Gamma}_2$  になり、射影空間での GW ディラック演算子は

$$P_1P_2D_{\text{GW}} = P_1P_2D_1 + P_1P_2D_2 \quad (5.57)$$

になる。ここで、  $D_1$  や  $D_2$  は (5.36) で与えられる。相互作用がない場合で議論したことは現在の場合にも適用でき、それは各非可換球面  $S_F^2$  上の演算子  $P_X(\Gamma_X - \hat{\Gamma}_X)$  や  $P_X(\Gamma_X + \hat{\Gamma}_X)$  のカイラル・ゼロモードを調べるのに十分である。

そのとき、各非可換球面  $S_F^2$  上の  $SO(3)$  ポアンカレ対称性のカシミア演算子により状態を分類される。  $SO(3)$  対称性の生成子は次式により与えられる：

$$(M_i)_X = (PA_i - L_i^R + \frac{\sigma_i}{2})_X. \quad (5.58)$$

ここで、  $A_i$  は一般化したモノポール配位 (5.45) である。(5.42) のように、カシミア演算子  $\sum_i (M_i)^2$  の固有状態を考える。第 3.2.4 節で詳細にみたように、  $(2J_X + 1)$  重縮退に加えて、状態  $|J_X\rangle$  は  $J_X = \frac{m+1}{2}, \frac{m+3}{2}, \dots, n + \frac{m-3}{2}$  に関して余分な 2 重縮退を持ち、一方で、  $J_X = \frac{m-1}{2}$  の最低スピン状態と  $J_X = n + \frac{m-1}{2}$  の最高スピン状態はそのような 2 重縮退を持たない。最低スピン状態は演算子  $P_X(\Gamma - \hat{\Gamma})_X$  のゼロモードのようになり、最高スピン状態は演算子  $P_X(\Gamma + \hat{\Gamma})_X$  のゼロモードになる。その他の状態はこれらの演算子の両方に関してゼロでない値を持つ。  $\Gamma_X|J_X = \frac{m-1}{2}\rangle = \hat{\Gamma}_X|J_X = \frac{m-1}{2}\rangle = -|J_X = \frac{m-1}{2}\rangle$  や  $\Gamma_X|J_X = n + \frac{m-1}{2}\rangle = -\hat{\Gamma}_X|J_X = n + \frac{m-1}{2}\rangle = -|J_X = n + \frac{m-1}{2}\rangle$ . を示すこともまたできる。

結果として、非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  に戻ると、モノポール背景場 (5.45) のディラック演算子  $P_1P_2D_{\text{GW}}$  のカイラル・ゼロモードは、  $J_1 = J_2 = \frac{m-1}{2}$  の最低スピン状態や  $J_1 = J_2 = n + \frac{m-1}{2}$  の最高スピン状態により与える。(5.1) や (5.2) の固有値で定義されるカイラリティは、これらすべての状態に関して 1 になる。それゆえ、ディラック演算子  $P_1P_2D_{\text{GW}}$  のインデックスはこれらの状態の縮退度を数えることにより与えられる：

$$m_1m_2 + (2n + m_1)(2n + m_2). \quad (5.59)$$

これは再び、可換極限でのトポロジカル・チャージ (5.52) と一致する。ついでに言うと、 $J_1 = \frac{m-1}{2}$  や  $J_2 = n + \frac{m-1}{2}$  の状態は演算子  $P_1 P_2 D_2$  のゼロでない固有値を持つので、ディラック演算子  $P_1 P_2 D_{\text{GW}}$  のカイラル・ゼロモードを与えない。 $J_1 = n + \frac{m-1}{2}$  と  $J_2 = \frac{m-1}{2}$  の状態はどちらも、ディラック演算子  $P_1 P_2 D_{\text{GW}}$  のカイラル・ゼロモードに寄与しない。

最低スピン状態が (5.59) の第 1 項に影響することに注目すべきである。これは (5.52) の右辺の最後の項の半分の値であり、私達が考えているモノポール背景場での第 2 チャーン指標の積分に正確に一致する。最低スピン状態は可換理論ではディラック演算子のカイラル・ゼロモードに対応するので、これは驚くべきことである。その他の (5.59) のゼロモードへのすべての寄与、したがって (5.52) や (5.51) のゼロモードへのすべての寄与は、最高スピン状態から生じ、可換理論でカイラル・ゼロモードに対応するものを持たない。(5.28) に戻ると、様々な項の起源を簡単に推測できる。

## 5.4 非可換 $2k$ 次元球面 $(S_F^2)^k$ への応用

この章では、第 5 章の定式化を非可換  $2k$  次元球面  $(S_F^2)^k$  に一般化する。非可換 4 次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  での定式化のように、まずは 2 つのカイラリティ演算子を次のように定義する：

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdots \Gamma_k, \quad (5.60)$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{\hat{\Gamma}_1 \cdots \hat{\Gamma}_k + \hat{\Gamma}_k \cdots \hat{\Gamma}_1}{\sqrt{(\hat{\Gamma}_1 \cdots \hat{\Gamma}_k + \hat{\Gamma}_k \cdots \hat{\Gamma}_1)^2}}. \quad (5.61)$$

これは (5.9) を満たす。(5.8) でのように、(5.61) の分母は

$$(\hat{\Gamma}_1 \cdots \hat{\Gamma}_k + \hat{\Gamma}_k \cdots \hat{\Gamma}_1)^2 = 4 + (\hat{\Gamma}_1 \cdots \hat{\Gamma}_k - \hat{\Gamma}_k \cdots \hat{\Gamma}_1)^2 \quad (5.62)$$

と書き下すことができる。(F.8) の下で示したように、 $[\hat{\Gamma}_X, \hat{\Gamma}_Y]$  は  $\mathcal{O}(n^{-2})$  のオーダーなので、第 2 項は  $\mathcal{O}(n^{-4})$  のオーダーである。そのとき、(5.35) でのように GW ディラック演算子を定義でき、それは GW 関係式 (5.11) やインデックス定理 (5.12) を満たす。

(5.13) の類似により、以下の関係式が満たされる：

$$\begin{aligned} & \Gamma_1 \cdots \Gamma_k - \hat{\Gamma}_1 \cdots \hat{\Gamma}_k \\ &= \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{n_1, \dots, n_k=0,1} \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{\sum_{X=1}^k n_X}\right) \prod_{X=1}^k \left(\Gamma_X + (-1)^{n_X} \hat{\Gamma}_X\right). \end{aligned} \quad (5.63)$$

ここで、積は演算子を  $X = 1$  から  $X = k$  へ順序づけることに関係する。係数  $(1 - (-1)^{\sum_{X=1}^k n_X})$  は積で演算子  $(\Gamma - \hat{\Gamma})_X$  の数が奇数になることを保証する。 $\Gamma_X$  や  $\hat{\Gamma}_X$  は可換極限で同じカイラリティ演算子になるので、(5.63) で  $(\Gamma - \hat{\Gamma})_X$  の数がより少ない項は可換極限においてより支配的である。

そのとき、(5.14) でのように、GW ディラック演算子 (5.35) の可換極限は次のようになる：

$$D_{\text{GW}} \rightarrow D'_1 \gamma_2 \cdots \gamma_k + \gamma_1 D'_2 \gamma_3 \cdots \gamma_k + \cdots + \gamma_1 \cdots \gamma_{k-1} D'_k. \quad (5.64)$$

ここで、(5.63) で 1 になる  $n_X$  の 1 つを持つ項のみ寄与する。これは可換な  $(S^2)^k$  上の一般化されたディラック演算子である。(式 (5.14) の後の議論を参照。)

トポロジカル・チャージの可換極限、(5.12) の右辺は (5.28) や (5.29) の一般化により与えられる。いま、以下のようにその結果を推測できる。

$$\frac{1}{2} \mathcal{T}r [\Gamma + \hat{\Gamma}] \rightarrow (1 + (-1)^k) 2^{k-1} n^k \text{tr} (1) + 2^{k-1} \sum_{i=1}^k n^{k-i} C_i . \quad (5.65)$$

第 1 項の係数  $(1 + (-1)^k)$  は、 $k$  が奇数の場合にこの項が消えることを表す。これは、2 つのカイラリティ演算子の寄与が奇数  $k$  に関してキャンセルされるからである。第  $i$  チャーン指標  $C_i$  の積分は

$$C_i = \frac{1}{(2\pi)^k i!} \int \text{tr} \left[ \sum_{1 \leq X_1 < \dots < X_i \leq k} \left( \prod_{X \notin (X_1 \dots X_i)} \frac{d\Omega_X}{2} (F^i)_{X_1 \dots X_i} \right) \right] \quad (5.66)$$

のように定義される。

たとえば、 $(F)_X$  や  $(F^2)_{XY}$  は (5.30) や (5.31) で与えられ、 $(F^3)_{XYZ}$  は次式のように表される：

$$\begin{aligned} & \frac{3!}{2^3} \rho^6 d\Omega_X d\Omega_Y d\Omega_Z \left( \epsilon_{abc} n_c \epsilon_{ijk} n_k \epsilon_{xyz} n_z (F_{ab} F_{ij} F_{xy} - F_{ai} F_{bj} F_{xy} \right. \\ & + F_{aj} F_{bi} F_{xy} - F_{ab} F_{ix} F_{jy} + F_{ab} F_{iy} F_{jx} - F_{ax} F_{by} F_{ij} + F_{ay} F_{bx} F_{ij} \\ & + F_{ai} F_{bx} F_{jy} - F_{ai} F_{by} F_{jx} - F_{aj} F_{bx} F_{iy} + F_{aj} F_{by} F_{ix} \\ & \left. - F_{ax} F_{bi} F_{jy} + F_{ay} F_{bi} F_{jx} + F_{ax} F_{bj} F_{iy} - F_{ay} F_{bj} F_{ix}) \right)_{XYZ} . \quad (5.67) \end{aligned}$$

ここで、 $a, b, c$  は球面  $X$ 、 $i, j, k$  は球面  $Y$ 、 $x, y, z$  は球面  $Z$  の添字を表す。しかしながら、場の強さは  $F_{ab}(\Omega_1, \dots, \Omega_k)$  のようにすべての座標に依存することに注意しなければならない。(5.65) の最高チャーン指標の項のみ行列サイズ  $n$  に独立である。第 5.2 節で非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  について行ったように、可換極限をとることによって推測 (5.65) を正確に示すことが重要である。それには複雑な計算が必要であり、今後の課題として残しておく。

ここで、非可換球面  $(S_F^2)^k$  上の  $(SU(2))^k$  ゲージ理論において、トポロジカルに非自明な配位であるモノポール配位を考えることにより、(5.65) の正当性を議論したい。それは (5.45) の一般化である。(5.46) でのように、射影空間のインデックス定理を考える：

$$\text{index} (P_1 \cdots P_k D_{\text{GW}}) = \frac{1}{2} \mathcal{T}r \left[ P_1 \cdots P_k (\Gamma + \hat{\Gamma}) \right] . \quad (5.68)$$



推測 (5.65) が有効ならば、(5.51) でのように、(5.68) の右辺の可換極限は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ P_1 \cdots P_k (\Gamma + \hat{\Gamma}) \right] \rightarrow (1 + (-1)^k) 2^{k-1} \prod_{X=1}^k (n + m_X) \\ & + 2^{k-1} \sum_{i=1}^k \left[ \sum_{1 \leq X_1 < \cdots < X_i \leq k} \left( \prod_{X \notin (X_1 \cdots X_i)} (n + m_X) \prod_{X \in (X_1 \cdots X_i)} \rho^2 \left( \int \frac{d\Omega}{4\pi} \epsilon_{ijk} n_k \text{tr} (\phi' F_{ij}) \right)_X \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.69)$$

となる。各  $S^2$  上のモノポールは第1チャーン指標  $(-m_X)$  を与える。(5.52) と同様の計算により、(5.69) は次式のようになる：

$$(1 + (-1)^k) 2^{k-1} n^k + (-1)^k 2^{k-1} \sum_{i=1}^k n^{k-i} \sum_{1 \leq X_1 < \cdots < X_i \leq k} m_{X_1} \cdots m_{X_i}. \quad (5.70)$$

以下では、可換極限をとる前の行列レベルで (5.68) の両辺を評価し、可換極限 (5.70) で推測したトポロジカル・チャージがその結果と一致することを示す。

(5.53) や (5.56) と同様の計算により、モノポール背景場に関して (5.68) の右辺は次式のようになる：

$$\frac{1}{2} \left( \prod_{X=1}^k \text{Tr}_X [P_X \Gamma_X] + \prod_{X=1}^k \text{Tr}_X [P_X \hat{\Gamma}_X] \right) = \frac{1}{2} \left( \prod_{X=1}^k (-2(n + m_X)) + (2n)^k \right). \quad (5.71)$$

ここで、実際に (5.70) を与える。

ディラック演算子のカイラル・ゼロモードを数えることにより、(5.68) の左辺を評価することもできる。(5.63) の各項を  $a = 1, \dots, 2^{k-1}$  の  $D_a$  で表すと、式 (5.57) の一般化を得ることができる。 $S_F^2 \times S_F^2$  の場合に与えたのと同じ議論が今の場合でも適用できる：ディラック演算子  $P_1 \cdots P_k D_{\text{GW}}$  のカイラル・ゼロモードは  $a = 1, \dots, 2^{k-1}$  のすべての演算子  $P_1 \cdots P_k D_a$  の同時ゼロモードとならなければならない。 $P_1 \cdots P_k D_a$  のゼロモードは、 $P_1 \cdots P_k D_a$  を構成する演算子  $P_X (\Gamma + \hat{\Gamma})_X$  や  $P_X (\Gamma - \hat{\Gamma})_X$  のゼロモードにより与えられる。 $J_X = \frac{m-1}{2}$  の最低スピン状態は演算子  $P_X (\Gamma - \hat{\Gamma})_X$  のゼロモードであり、 $J_X = n + \frac{m-1}{2}$  の最高スピン状態は演算子  $P_X (\Gamma + \hat{\Gamma})_X$  のゼロモードである。結局、ディラック演算子  $P_1 \cdots P_k D_{\text{GW}}$  のカイラル・ゼロモードは、偶数個の  $J_X$  が最高スピン、残った  $J_X$  が最低スピンである状態により与えられることがわかった。(5.1) や (5.2) の固有値により定義されるカイラリティは  $k$  が偶数のこれらすべての状態に関して1であり、 $k$  が奇数の場合は  $-1$  である。(5.59) でのようにこれらの状態数を数えることにより、ディラック演算子  $P_1 \cdots P_k D_{\text{GW}}$  のインデックスを次のように評価できる：

$$(-1)^k \sum_{i=0,2,\dots} \left[ \sum_{1 \leq X_1 < \cdots < X_i \leq k} \left( \prod_{X \in (X_1, \dots, X_i)} (2n + m_X) \prod_{X \notin (X_1, \dots, X_i)} m_X \right) \right]. \quad (5.72)$$

これは再び (5.70) の結果を再現する。ついでに、私達が  $J_{X_1}, \dots, J_{X_i}$  と呼んでいる奇数の  $i$  を持つ最高スピンの状態  $J_X$  は演算子  $P_1 \cdots P_k D_a$  のゼロでない固有値を持ち、それは  $X \in (X_1, \dots, X_i)$  の  $(\Gamma - \hat{\Gamma})_X$  や  $X \notin (X_1, \dots, X_i)$  の  $(\Gamma + \hat{\Gamma})_X$  を構成する。したがって、これらの状態はディラック演算子  $P_1 \cdots P_k D_{\text{GW}}$  のカイラル・ゼロモードに寄与しない。最低スピンであるすべての  $J_X$  を持つ状態は (5.72) で  $\prod_{X=1}^k (-m_X)$  を与える  $i = 0$  の項に参与し、その項は我々が考えている背景のゲージ場の第  $k$  チャーン指標と正確に一致する。これらの状態は可換理論のカイラル・ゼロモードに対応するので、道理にかなっているといえる。

(5.71) や (5.72) と (5.70) の一致は推測 (5.69)、すなわち (5.65) を支えるものである。

## 5.5 修正した定式化による考察

この節では、第 5.1 節とは異なる方法でカイラリティ演算子を構成し、ディラック演算子やトポロジカル・チャージを評価する。

第 5.1 節において、私達はカイラリティ演算子を次のように定義した：

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2, \quad (5.73)$$

$$\hat{\Gamma} = \frac{\{\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2\}}{\sqrt{\{\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2\}^2}}. \quad (5.74)$$

(5.74) では、各  $S_F^2$  上の規格化されたカイラリティ演算子  $\hat{\Gamma}_X$  を用いて、 $S_F^2 \times S_F^2$  上の規格化されたカイラリティ演算子  $\hat{\Gamma}$  を構成している。つまり、この定式化では 2 回の規格化を行っていることになる。しかし、規格化を 1 回にして、 $S_F^2 \times S_F^2$  上のカイラリティ演算子を次のように直接構成することもできる：

$$\hat{\Gamma}' = \frac{\{H_1, H_2\}}{\sqrt{\{H_1, H_2\}^2}}. \quad (5.75)$$

ここで、 $H_X$  は (5.5) で定義されている演算子である。(5.10) のようにディラック演算子を定義すると、 $\hat{\Gamma}$  を  $\hat{\Gamma}'$  に置き換えることにより、GW 関係式 (5.11) やインデックス定理 (5.12) は同様に満たされる。

次に、この修正した定式化 (5.75) において、ディラック演算子とトポロジカル・チャージの可換極限を計算する。(F.2) を (5.75) に代入し、 $\beta$  でのゲージ場展開を行うと下式が

得られる。

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}' &= \alpha_1 \alpha_2 \\
&+ \left( \frac{1}{4} \{ \alpha_2, \beta_1 - \alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \} + (1 \leftrightarrow 2) \right) \\
&+ \frac{1}{32} \left( 7 \{ \beta_1, \beta_2 \} - 5 \alpha_1 \alpha_2 \{ \beta_1, \beta_2 \} \alpha_1 \alpha_2 + 3 \{ \alpha_1 \beta_1 \alpha_1, \alpha_2 \beta_2 \alpha_2 \} \right. \\
&- \left( \{ \beta_1, \alpha_2 \beta_2 \alpha_2 \} + \alpha_1 \{ \beta_1, \beta_2 \} \alpha_1 - 3 \alpha_1 \{ \beta_1, \alpha_2 \beta_2 \alpha_2 \} \alpha_1 \right. \\
&+ \alpha_2 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 + \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1 \\
&+ \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1 + \alpha_2 \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 + (1 \leftrightarrow 2) \left. \right) \\
&- \left( \{ \alpha_2, \alpha_1 \beta_1^2 + \beta_1^2 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_1 \beta_1 \} + \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_1 + \beta_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_1 + \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \right. \\
&+ \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2 + \alpha_2 \beta_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_2 \\
&\left. - 3 \{ \alpha_2, \alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \} + \alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 + (1 \leftrightarrow 2) \right) \left. \right) \\
&+ \mathcal{O}(\beta^3) . \tag{5.76}
\end{aligned}$$

$\beta$  の 0 次と 1 次のオーダーである (5.76) の第 1 項と第 2 項は、もともとの定式化の結果 (5.18) や (5.19) の第 1 項と、演算子のレベル、すなわちトレースをとる前の状態で一致している。そのとき、ディラック演算子の可換極限は  $n^{-1}$  のオーダーまででのみ  $\hat{\Gamma}'$  に影響するので、ディラック演算子  $-a^{-1}(\Gamma - \hat{\Gamma}')$  の可換極限はもともとの定式化の結果 (5.14) と同じ値になる。

次に、トポロジカル・チャージ  $\frac{1}{2} \text{Tr}(\Gamma + \hat{\Gamma}')$  の可換極限を考える。それは、 $n^{-4}$  のオーダーまででのみ  $\hat{\Gamma}'$  に影響する。演算子のレベルで、 $\hat{\Gamma}'$  と  $\hat{\Gamma}$  は  $\mathcal{O}(\beta^2)$  で異なる一方で、その差のトレースは次式のようにになる。

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\hat{\Gamma}' - \hat{\Gamma}] &= \frac{1}{16} \text{Tr} \left[ [\alpha_2, \beta_1] \alpha_1 \alpha_2 [\alpha_2, \beta_1] - \alpha_1 [\alpha_2, \beta_1] \alpha_1 \alpha_2 [\alpha_2, \beta_1] \alpha_1 \right] \\
&+ \mathcal{O}((\beta_2)^2) + \mathcal{O}(\beta_1 \beta_2) + \mathcal{O}(\beta^3) . \tag{5.77}
\end{aligned}$$

ただし、ここでは  $(\beta_1)^2$  の項のみ記述している。(5.77) は可換極限で消えるので、トポロジカル・チャージ  $\frac{1}{2} \text{Tr}(\Gamma + \hat{\Gamma}')$  の可換極限はもともとの定式化 (5.28) と同じになる。

第 5.1 節の定式化において、(5.19) での  $\{ \alpha_1, \zeta_2^{(2)} \}$  や  $\{ \alpha_2, \zeta_1^{(2)} \}$  の可換極限は、第 1 チャーン指標のゲージ場の 2 次の項を与える。(5.21) の  $\{ \zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)} \}$  の可換極限は、第 2 チャーン指標の一部である (5.25) のゲージ場の 2 次の項を与える。(5.22) の  $\alpha_1 \alpha_2 ([\alpha_1, \zeta_2^{(1)}] - [\alpha_2, \zeta_1^{(1)}])^2$  の可換極限は (5.26) のゲージ場の 2 次の項を与える。しかしながら、この節で行った修正した定式化においては、対応する項は (5.76) の第 3 項とすべて混ざっており、もともとの定式化で行ったような同じ計算を実行することは難しい。このように、修正された定式化は規格化が 1 回しか行われていないので定義自体は簡潔であるが、もともとの定式化に比べて計算が複雑になることがわかる。

以上のことから、ディラック演算子の可換極限とトポロジカル・チャージは、第 5.1 節で行った定式化から求めた (5.14) や (5.28) と正確に同じ結果を与えることが示された。この一致は、トポロジカルな量が理論のわずかな修正に対して変わらないことを意味している。

## 第6章 結論と展望

本論文では、格子ゲージ理論で発展した GW 関係式のアイデアを応用し、行列模型の余剰次元空間において非自明なトポロジカル・チャージを構成する枠組みを示した。以下に、その具体的な内容をまとめる。

ここではまず最初に、IIB 行列模型において 4 次元以外の余剰次元空間に非可換球面が埋め込まれた場合を想定し、非可換 2 次元球面  $S_F^2$  を考えている。この球面上で GW 関係式を満たす GW ディラック演算子を構成し、非自明なインデックスを持つ TP モノポール配位に関して有限なトポロジカル・チャージが得られることを示した。この定式化においてディラック演算子のスペクトルを求め、カイラル・ゼロモードの数がトポロジカル・チャージの値と一致することをみることでインデックス定理が成り立っていることも確認した。その上、ヤン・ミルズ・チャーン・サイモン模型を用いて、ゲージ群の自発的対称性の破れを通して非自明なインデックスが自発生成される機構を示している。

これらの発展をうけて、第 4 章では TP モノポール配位のような特殊な配位に限らず、運動方程式を満たさないような一般の配位についても有効なように定義を拡張した。ここで得られたトポロジカル・チャージの可換極限は、トーフトにより与えられた破れずに残った  $U(1)$  の磁荷と一致することを示している。また、定義を一般の配位に拡張したことにより配位空間全体を見ることができるようになったので、配位空間をトポロジカル・セクターに分類するにあたって格子ゲージ理論で発展した許容条件を応用し、この定式化を有効にするための条件を提示した。格子ゲージ理論で知られている通常の許容条件は揺らぎに対し上限のみを与えるが、ここでの許容条件は上限と下限を与えている。また、トポロジカル・チャージのトポロジカルな特性について調べており、可換理論の場合と同様に、トポロジカル・チャージが非可換理論におけるスカラー場の巻き付き数により記述できることを示した。さらに、トポロジカル・チャージが 1 と  $-1$  のトポロジカル・セクターをつなぐような具体的な配位について考察している。

続く第 5 章では、非可換  $2 \times 2$  次元球面  $S_F^2 \times S_F^2$  に第 3 章の定式化を応用して GW ディラック演算子を構成した。GW 関係式によりインデックス定理が満たされるため、トポロジカル・チャージを構成できる。このトポロジカル・チャージの可換極限は直接計算でき、第 1 チャーン指標と第 2 チャーン指標の和になることを示した。さらに、 $k > 2$  の非可換球面  $(S_F^2)^k$  上のトポロジカル・チャージに関して、その可換極限の取り得る値を推測した。その上、自由場の場合とモノポール背景場の場合に関してディラック演算子のカイラル・ゼロモードを計算し、私達の定式化より導かれた値と一致することを確かめた。非可換球面  $(S_F^2)^k$  上のディラック演算子のゼロモードは最高スピン状態と最低スピン状態から成る。この最低スピン状態は、可換理論におけるディラック演算子のゼロモードに対応する。一方で、最高スピン状態は  $(\Gamma + \hat{\Gamma})_X$  のゼロモードにあたり、可換理論における対応物は存在しない。実際に、最低スピン状態のみから成るカイラルゼロモードは、正確に

$(S_F^2)^k$  上の第  $k$  チャーン指標を与えることがわかった。

以上の結果をふまえて、以下では今後の展望についていくつか記述する。本論文ではゲージ群の基本表現を持つフェルミ粒子について議論してきたが、最近では、随伴表現を持つフェルミ粒子についての非可換球面や非可換トーラス上の GW 関係式の定式化に関する研究もなされている [43, 44]。また、本論文では理論が整合性を保つような条件として許容条件を手で課しているが、この条件がダイナミカルに実現されるメカニズムを考えるのは興味深い。許容条件により取り除かれる配位が排除されるようにボゾン作用を修正することもでき、それによりこの定式化のモンテカルロ・シミュレーションも可能になるだろう。さらに、第 4 章で具体例として考察した配位は、トポロジカル・チャージが 1 と  $-1$  の領域を内挿するような配位であったが、その他のトポロジカル・セクターの配位を考えるのも面白い問題である。しかしながら、トポロジカル・チャージが 2 以上の配位を考えるためには、空間とゲージ場が別々に記述できるような配位の表式を得る必要があるだろう。その上、第 5 章では各  $S^2$  に巻き付いたモノポール配位を考えたと、より高次元の空間に巻き付く配位を構成できれば面白いテーマとなるだろう。そのとき、添字が異なる球面の添字と混ざる場の強さは重要な役割を果たす。また、第 3.2.6 章のようなインデックスの自発生成のメカニズムを、非可換 2 次元球面以外のより一般的な非可換多様体に行うことも興味深い問題である。これらの課題を通して私達の定式化をより確かなものにするにより、当初の目的である IIB 行列模型からカイラル・フェルミオンを実現する道筋を示すことが出来る。一方、トポロジカル・チャージの定義を与え、非可換多様体上のゲージ場の配位空間をトポロジカル・セクターに分類することができる私達の定式化は、弦理論のコンパクト化に対しても有用な手段になると期待できる。エネルギースケールが高すぎて実験では検証し難い弦理論に関して、現実の物理を再現するのは必須の条件である。こうした様々な課題を通してさらに研究を進めることで、IIB 行列模型から私達の世界を記述する標準模型を導出することができれば、弦理論が統一理論に大きく近づくことになるだろう。

## 謝辞

本論文を書くにあたり、丁寧なご指導と様々な助言をいただいた青木一さんに心より感謝いたします。青木一さんには修士課程から就職後までも、物理についての解説・議論から様々な相談に至るまで、多方面にわたり大変お世話になりました。高エネルギー加速器機構の磯暁さんにも、共同研究者としてお世話になりました。米山博志さんには学部の頃からゼミや授業を通して熱心にご指導いただき、様々な相談にも親身になって対応していただきました。船久保公一さんにはよく気にかけていただき、物理に関するコメントや議論をしていただきました。物理科の他の先生方にも、物理に関するご指導やコメントをいただき、大変お世話になりました。前田敏治さん、新野康彦さん、牟田尚洋さんを始めとする先輩方には、いつも親身になって議論の相手をしていただき、多方面にわたってご指導いただきました。矢倉敬子さんを始めとする素粒子論研究室の後輩のみなさんにもよく議論の相手をしていただき、様々な面から支えていただきました。

周囲のたくさんの方々に支えていただき応援していただいたからこそ、この博士論文を完成させることができました。この場を借りて、お世話になったすべての方々に心からお礼申し上げます。本当にありがとうございました。

## 付録 A インデックス定理

この付録では、第 2.2.1 節の一般的なカイラリティ演算子やディラック演算子 (2.9) の定義を用いて、インデックス定理 (2.11) の証明を行う。

(2.9) から、ディラック演算子は次式で定義される：

$$f(a, \Gamma) D_{\text{GW}} = 1 - \Gamma \hat{\Gamma} . \quad (\text{A.1})$$

この (A.1) のエルミート共役をとると次式を得る。

$$D_{\text{GW}}^\dagger f(a, \Gamma)^\dagger = 1 - \Gamma \hat{\Gamma} . \quad (\text{A.2})$$

一方、ディラック演算子 (A.1) の左から  $\Gamma$  を作用させたものと、右から  $\hat{\Gamma}$  を作用させたものを足し合わせると、次のような GW 関係式を得ることができる。

$$\Gamma D_{\text{GW}} + D_{\text{GW}} \hat{\Gamma} = 0 , \quad (\text{A.3})$$

$$D_{\text{GW}}^\dagger \Gamma + \hat{\Gamma} D_{\text{GW}}^\dagger = 0 . \quad (\text{A.4})$$

また、(A.1) の左右から  $\Gamma$  を作用させると (A.2) になり、(A.2) の左右から  $\Gamma$  を作用させると (A.1) が得られる。

$$D_{\text{GW}}^\dagger = \Gamma f(a, \Gamma) D_{\text{GW}} \Gamma f(a, \Gamma)^{\dagger-1} , \quad (\text{A.5})$$

$$D_{\text{GW}} = f(a, \Gamma)^{-1} \Gamma D_{\text{GW}}^\dagger f(a, \Gamma)^\dagger \Gamma . \quad (\text{A.6})$$

同様に、(A.1) や (A.2) の左右から  $\hat{\Gamma}$  を作用させると、

$$D_{\text{GW}} = \hat{\Gamma} f(a, \Gamma) D_{\text{GW}} \hat{\Gamma} f(a, \Gamma)^{\dagger-1} , \quad (\text{A.7})$$

$$D_{\text{GW}}^\dagger = f(a, \Gamma)^{-1} \hat{\Gamma} D_{\text{GW}}^\dagger f(a, \Gamma)^\dagger \hat{\Gamma} \quad (\text{A.8})$$

となる。

ここで、スピノル行列  $\psi$  のフォック空間  $\mathcal{H}$  を導入する。非可換 2 次元球面  $S_F^2$  の場合、 $\mathcal{H}$  は  $N \times N$  のエルミート行列全体の集合となり、上で述べたディラック演算子  $D_{\text{GW}}$  やカイラリティ演算子  $\Gamma$ 、 $\hat{\Gamma}$  はこの空間に作用する。まず、フォック空間  $\mathcal{H}$  を  $D_{\text{GW}}$  と  $D_{\text{GW}}^\dagger$  のゼロ固有モードと非ゼロ固有モードに分解する：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \bar{\mathcal{H}}_0 \quad (\text{A.9})$$

$$= \mathcal{H}'_0 \oplus \bar{\mathcal{H}}'_0 . \quad (\text{A.10})$$

ここで、 $\mathcal{H}_0$  と  $\mathcal{H}'_0$  は

$$\mathcal{H}_0 = \{ \psi \in \mathcal{H} \mid D_{\text{GW}} \psi = 0 \} , \quad (\text{A.11})$$

$$\mathcal{H}'_0 = \{ \psi \in \mathcal{H} \mid D_{\text{GW}}^\dagger \psi = 0 \} \quad (\text{A.12})$$

であり、 $\bar{\mathcal{H}}_0$  と  $\bar{\mathcal{H}}'_0$  はその補空間を表す。

まず最初に、次の関係を示す。

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \mathcal{H}'_0, & \bar{\mathcal{H}}_0 &= \bar{\mathcal{H}}'_0, \\ \psi \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}'_0 &\Rightarrow \Gamma\psi = \hat{\Gamma}\psi \in \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}'_0.\end{aligned}\tag{A.13}$$

もし  $\psi \in \mathcal{H}_0$  ならば  $D_{\text{GW}}\psi = 0$  なので、(A.3) より  $\hat{\Gamma}\psi \in \mathcal{H}_0$  となる。また、(A.1) より  $\Gamma\psi \in \mathcal{H}_0$  となる。したがって、(A.5) より  $D_{\text{GW}}^\dagger\psi = 0$  となるので  $\psi \in \mathcal{H}'_0$  とわかる。このことから、 $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}'_0$  が示される。同様に、もし  $\psi \in \mathcal{H}'_0$  の場合は (A.4) より  $\Gamma\psi \in \mathcal{H}'_0$  である。よって、(A.6) より  $D_{\text{GW}}\psi = 0$  となるので  $\psi \in \mathcal{H}_0$  とわかるので、 $\mathcal{H}'_0 \subset \mathcal{H}_0$  が示される。以上のことから、 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}'_0$  が証明される。 $\bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}'_0$  はその対偶である。

次に、以下の関係を示す。

$$\psi \in \bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}'_0 \Rightarrow \Gamma\psi, \hat{\Gamma}\psi \in \bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}'_0.\tag{A.14}$$

もし  $\Gamma\psi \in \mathcal{H}'_0$  ならば  $D_{\text{GW}}^\dagger\Gamma\psi = 0$  なので、(A.4) より  $\hat{\Gamma}D_{\text{GW}}^\dagger\psi = 0$  となる。この両辺に左から  $\hat{\Gamma}$  を作用させると、 $D_{\text{GW}}^\dagger\psi = 0$  となるので、 $\psi \in \mathcal{H}'_0$  とわかる。同様に、もし  $\hat{\Gamma}\psi \in \mathcal{H}_0$  ならば  $D_{\text{GW}}\hat{\Gamma}\psi = 0$  なので、(A.3) より  $\Gamma D_{\text{GW}}\psi = 0$  となる。この両辺に左から  $\Gamma$  を作用させると、 $D_{\text{GW}}\psi = 0$  となるので、 $\psi \in \mathcal{H}_0$  とわかる。

最後に、次の関係を示す。

$$\psi \in \bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}'_0 \Rightarrow \Gamma\psi.\tag{A.15}$$

もし  $\Gamma\psi = \pm\psi$  ならば、(A.4) より  $\hat{\Gamma}(D_{\text{GW}}^\dagger\psi) = -D_{\text{GW}}^\dagger\Gamma\psi = \mp(D_{\text{GW}}^\dagger\psi)$  となる。同様に、もし  $\hat{\Gamma}\psi = \pm\psi$  ならば、(A.3) より  $\Gamma(D_{\text{GW}}\psi) = -D_{\text{GW}}\hat{\Gamma}\psi = \mp(D_{\text{GW}}\psi)$  となる。

したがって、(A.13)、(A.14)、(A.15) より次のようにインデックス定理を示すことができる：

$$\begin{aligned}\mathcal{T}r(\Gamma + \hat{\Gamma}) &= \mathcal{T}r_{\mathcal{H}_0}(\Gamma + \hat{\Gamma}) + \mathcal{T}r_{\bar{\mathcal{H}}_0}(\Gamma + \hat{\Gamma}) \\ &= \mathcal{T}r_{\mathcal{H}_0}(\Gamma + \hat{\Gamma}) \\ &= 2(n_+ - n_-) \\ &= 2 \text{index}(D_{\text{GW}}).\end{aligned}\tag{A.16}$$

## 付録B 1-ループ有効作用

この付録では、背景場の方法により 1-ループ有効作用を求める。次のように、背景場  $X_i$  とそのまわりの揺らぎ  $\tilde{A}_i$  に分解する：

$$A_i = X_i + \tilde{A}_i . \quad (\text{B.1})$$

作用 (3.77) にゲージ固定項とゴースト項を加えると、

$$S_{\text{g.f.}} = -\frac{1}{g^2} \text{tr} [X_i, A_i]^2 , \quad (\text{B.2})$$

$$S_{\text{ghost}} = -\frac{1}{g^2} \text{tr} ([X_i, \bar{c}][A_i, c]) \quad (\text{B.3})$$

となる。ここで  $c$  はゴースト場、 $\bar{c}$  は反ゴースト場である。

作用 (3.77) をゆらぎの 2 次まで展開すると、次式を得る。

$$S_{\text{total}} = S[X_i] + S_2 , \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2g^2} \text{tr} \left( \tilde{A}_i [X_k, [X_k, \tilde{A}_i]] - 2([X_i, X_j] - i\epsilon_{ijk} X_k) [\tilde{A}_i, \tilde{A}_j] \right) + \frac{1}{g^2} \text{tr} \left( \bar{c} [X_k, [X_k, c]] \right) \\ &= \frac{1}{2g^2} \text{tr} \left( \tilde{A}_i [(\tilde{X}_k)^2 \delta_{ij} + 2([\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] - i\epsilon_{ijk} \tilde{X}_k)] \tilde{A}_j \right) + \frac{1}{g^2} \text{tr} \left( \bar{c} (\tilde{X}_k)^2 c \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

ここで、最後の行では次の随伴演算子を導入している。

$$\tilde{X}_i M = [X_i, M], \quad (\text{B.6})$$

$$([\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] - i\epsilon_{ijk} \tilde{X}_k) M = [([X_i, X_j] - i\epsilon_{ijk} X_k), M]. \quad (\text{B.7})$$

ただし、 $\tilde{A}_i$  の 1 次の項は背景場の方法により手でおとしている。

よって、1-ループ有効作用  $W_1$  は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} W_1 &= -\log \int d\tilde{A} d c d \bar{c} e^{-S_2} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{T}r \text{tr}' \log [(\tilde{X}_k)^2 \delta_{ij} + 2([\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] - i\alpha\epsilon_{ijk} \tilde{X}_k)] - \mathcal{T}r \log [(\tilde{X}_k)^2] . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ここで、 $\mathcal{T}r$  は行列に作用する演算子のトレースで、 $\text{tr}'$  は時空の添字  $i, j$  に対するトレースである。



## 付 録 C 電荷演算子の可換極限

この付録では、(4.3) となること、すなわち電荷演算子  $T'$  が可換極限で規格化されたスカラ場  $\phi'$  になることを示す。

いま  $U(2)$  ゲージ群を考えているので、ゲージ場は次のように  $SU(2)$  部分と  $U(1)$  部分を持つ。

$$A_i = L_i + \rho \left( a_i^a \frac{\tau^a}{2} + a_i^0 \frac{\mathbf{1}}{2} \right), \quad (\text{C.1})$$

ここで、第 1 項  $L_i$  は  $\mathcal{O}(n)$  のオーダーである。 $SU(2)$  部分  $\rho a_i^a$  は  $\mathcal{O}(1)$  のオーダー、 $U(1)$  部分  $\rho a_i^0$  は  $\mathcal{O}(1/n)$  のオーダーであると仮定する。

そのとき、スカラ場

$$(A_i)^2 - (L_i)^2 = \rho n \left( \phi^a \frac{\tau^a}{2} + \phi^0 \frac{\mathbf{1}}{2} \right) \quad (\text{C.2})$$

は  $\mathcal{O}(1)$  の  $SU(2)$  部分  $\rho\phi^a$  と、 $\mathcal{O}(1/n)$  の  $U(1)$  部分  $\rho\phi^0$  を持つ。(C.2) の 2 乗は次のようになる。

$$[(A_i)^2 - (L_i)^2]^2 = \frac{1}{4} \rho^2 n^2 \left[ i\epsilon_{abc} [\phi^a, \phi^b] \tau^c + (\phi^a)^2 + \{\phi^a, \phi^0\} \tau^a + (\phi^0)^2 \right]. \quad (\text{C.3})$$

この表式において、第 2 項  $\rho^2(\phi^a)^2$  は  $\mathcal{O}(1)$  のオーダーであり、他の項は  $\mathcal{O}(1/n)$  のオーダーである。

それゆえ、可換極限において、電荷演算子  $T'$  は

$$T' = \frac{(A_i)^2 - (L_i)^2}{\sqrt{[(A_i)^2 - (L_i)^2]^2}} \rightarrow \frac{2\phi^a(x) \frac{\tau^a}{2}}{\sqrt{(\phi^a(x))^2}} = 2\phi'^a(x) \frac{\tau^a}{2} = 2\phi'(x) \quad (\text{C.4})$$

となり、(4.3) が示される。

$U(1)$  部分が無視できるほど小さいと課した理由は、 $\phi'$  の規格化のためである。この仮定は、第 4.1.2 節で議論した、定式化の有効性を保証する許容条件とは何の関係もない。そのとき、配位に何の制限も加えないで正確な可換極限を持つような、より精巧な  $T'$  を定義することが望ましい。

## 付録D ディラック演算子とトポロジカル・チャージの可換極限

この付録では、ディラック演算子 (4.8) とトポロジカル・チャージ (4.12) の可換極限をとる計算を示す。

$(T')^2 = 1$  や  $(\hat{\Gamma})^2 = 1$  より、カイラリティ演算子  $\hat{\Gamma}'$  の分母は次のように書くことができる。

$$\{T', \hat{\Gamma}'\}^2 = 4 + [T', \hat{\Gamma}']^2. \quad (\text{D.1})$$

(D.1) の第2項は  $1/n^2$  のオーダーである。したがって、次式を得ることができる。

$$\hat{\Gamma}' = \frac{1}{2}\{T', \hat{\Gamma}'\} - \frac{1}{16}\{T', \hat{\Gamma}'\}[T', \hat{\Gamma}']^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (\text{D.2})$$

ディラック演算子  $D'_{\text{GW}}$  の可換極限をとる時、(D.2) の第1項を考慮をすれば十分であり、簡単に次式を示すことができる。

$$D'_{\text{GW}} = a^{-1}\frac{1}{2}\{T', (\hat{\Gamma}' - \Gamma)\} + \mathcal{O}(1/n) \quad (\text{D.3})$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\{2\phi', D'_{\text{com}}\}. \quad (\text{D.4})$$

特に、 $\phi'^a(x) = (0, 0, 1)$  ゲージにおいて、これは破れずに残った  $U(1) \times U(1)$  ゲージ場に結合したディラック演算子になる。

しかしながら、トポロジカル・チャージの可換極限をとることにに関して、(D.2) の第2項も同様に考慮しなければ成らない。ゆえに、

$$\frac{1}{4}\mathcal{T}r[\Gamma' + \hat{\Gamma}'] = \frac{1}{4}\mathcal{T}r\left[T'(\Gamma + \hat{\Gamma}') - \frac{1}{8}T'\hat{\Gamma}'[T', \hat{\Gamma}']^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \quad (\text{D.5})$$

となる。第1項と第2項は  $1/n^2$  のオーダーであり、トレースをとると  $n^2$  が出てくるので、トレースをとった後には有限な値を与えることに注意すべきである。可換極限の第1項は、[14, 15] でのように、次式を与える。

$$\frac{1}{4}\mathcal{T}r[T'(\Gamma + \hat{\Gamma}')] \rightarrow \frac{\rho^2}{8\pi} \int_{S^2} d\Omega \epsilon_{ijk} n_i \phi'^a F_{jk}^a. \quad (\text{D.6})$$

$F_{jk} = F_{jk}^a \tau^a / 2$  は  $F_{jk} = \partial_j a'_k - \partial_k a'_j - i[a'_j, a'_k]$  で定義された場の強さであり、 $a'_i = \epsilon_{ijk} x_j a_k / \rho$  は球面上のゲージ場の接線成分である。第2項は次のようになる。

$$-\frac{1}{4}\mathcal{T}r\left[\frac{1}{2}T'\hat{\Gamma}'\left[\hat{\Gamma}', \frac{1}{2}T'\right]^2\right] \rightarrow -\frac{1}{4} \frac{n^2}{4\pi} \int_{S^2} d\Omega \text{tr}_{\sigma, \tau} \left[\phi'(n \cdot \sigma) \left(-i a \rho \epsilon_{ijk} \sigma_i n_j (D_k \phi')\right)^2\right]. \quad (\text{D.7})$$

ただし、 $\text{tr}_{\sigma,\tau}$  はスピノル空間とゲージ場の空間のトレースを表し、 $D_j$  は  $D_j = \partial_j - i[a'_j, \ ]$  として定義された共変微分演算子である。また、ここでは

$$\left[ \hat{\Gamma}, \frac{1}{2} T' \right] \rightarrow -ia\rho\epsilon_{ijk}\sigma_i n_j (D_k \phi') \quad (\text{D.8})$$

の関係式を使用した。トレース  $\text{tr}_{\sigma,\tau}$  をとると、(D.7) は次のようになる。

$$-\frac{\rho^2}{8\pi} \int_{S^2} d\Omega \epsilon_{ijk} n_i \epsilon_{abc} \phi'^a (D_j \phi')^b (D_k \phi')^c . \quad (\text{D.9})$$

それゆえ、トポロジカル・チャージの可換極限は

$$\frac{1}{4} \mathcal{T}r[\Gamma' + \hat{\Gamma}'] \rightarrow \frac{\rho^2}{8\pi} \int_{S^2} d\Omega \epsilon_{ijk} n_i \left( \phi'^a F_{jk}^a - \epsilon_{abc} \phi'^a (D_j \phi')^b (D_k \phi')^c \right) \quad (\text{D.10})$$

となり、これはトーフトによって導入されたトポロジカル・チャージに正確に一致する [38]。

## 付録E カイラリティ演算子のゼロモードにおける分析

この付録では、(4.47) と (4.54) を得るために、カイラリティ演算子  $\hat{\Gamma}$  と  $\hat{\Gamma}'$  のゼロモードを調べる。

### E.1 基底とユニタリー変換

(4.46) の下で言及したように、 $j = l$  領域には 2 重縮退が存在する。したがって、 $|+\rangle$  や  $|-\rangle$  と呼ぶ 2 重項を選ぶという曖昧さを持っている。ここで、 $i = 1, 2, 3$  の 3 種類の基底  $|\pm\rangle_i$  を導入する： $|\pm\rangle_1$  はスピン演算子  $L_i + \frac{\tau_i}{2}$  により対角化されており、それぞれスピン  $l \pm \frac{1}{2}$  を持つ。同様に、 $|\pm\rangle_2$  はスピン  $l \pm \frac{1}{2}$  を持つ  $L_i + \frac{\sigma_i}{2}$  により対角化され、 $|\pm\rangle_3$  はスピン  $1/2 \pm 1/2$  を持つ  $\frac{\sigma_i}{2} + \frac{\tau_i}{2}$  により対角化されている。それゆえ、これらの状態が以下の演算子についての固有状態である：

$$L \cdot \tau = \begin{cases} l = \frac{n-1}{2} & |+\rangle_1 \text{ の場合,} \\ -(l+1) = -\frac{n+1}{2} & |-\rangle_1 \text{ の場合,} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

$$L \cdot \sigma = \begin{cases} l = \frac{n-1}{2} & |+\rangle_2 \text{ の場合,} \\ -(l+1) = -\frac{n+1}{2} & |-\rangle_2 \text{ の場合,} \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

$$\sigma \cdot \tau = \begin{cases} 1 & |+\rangle_3 \text{ の場合,} \\ -3 & |-\rangle_3 \text{ の場合.} \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

異なるタイプの基底はユニタリー変換

$$|a\rangle_i = \sum_{b=\pm} U_{ab}^{(ij)} |b\rangle_j \quad (\text{E.4})$$

により、互いに関係している。ユニタリー行列  $U^{(ij)}$  は以下のように表すことができる：

$$U^{(12)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{l(l+1)}} & -\frac{2\sqrt{l(l+1)}}{2l+1} \\ \frac{2\sqrt{l(l+1)}}{2l+1} & \frac{1}{2l+1} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.5})$$

$$U^{(23)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l}{2l+1}} & -\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \\ \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} & \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.6})$$

$$U^{(13)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{l}{2l+1}} & -\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \\ \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} & -\sqrt{\frac{l}{2l+1}} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.7})$$

これは、最高ウェイト状態、すなわち各多重項の  $j=l, j_z=l$  の状態を比較することにより調べることができる。

$$\begin{cases} |+\rangle_1 = \sqrt{\frac{l}{(l+1)(2l+1)}} |l-1 \uparrow\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{1}{2(l+1)(2l+1)}} |l \uparrow\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{2l+1}{2(l+1)}} |l \downarrow\uparrow\rangle, \\ |-\rangle_1 = -\sqrt{\frac{1}{2l+1}} |l-1 \uparrow\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2l}{2l+1}} |l \uparrow\downarrow\rangle, \\ |+\rangle_2 = -\sqrt{\frac{l}{(l+1)(2l+1)}} |l-1 \uparrow\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2l+1}{2(l+1)}} |l \uparrow\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{2(l+1)(2l+1)}} |l \downarrow\uparrow\rangle, \\ |-\rangle_2 = -\sqrt{\frac{1}{2l+1}} |l-1 \uparrow\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2l}{2l+1}} |l \downarrow\uparrow\rangle, \\ |+\rangle_3 = -\sqrt{\frac{1}{l+1}} |l-1 \uparrow\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{l}{2(l+1)}} |l \uparrow\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{l}{2(l+1)}} |l \downarrow\uparrow\rangle, \\ |-\rangle_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} |l \uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |l \downarrow\uparrow\rangle. \end{cases}$$

## E.2 $\hat{\Gamma}$ のゼロモードに関する計算

ここでは、(4.40) の演算子  $H$  についてゼロモードを考える。ゼロモードの関係式  $H|\psi\rangle = 0$  は、

$$\left(\sigma \cdot L + \frac{1}{2}\right) |\psi\rangle = -h \frac{1}{2} \sigma \cdot \tau |\psi\rangle \quad (\text{E.8})$$

のように書くことができる。  $j=l+1$  の状態は、(E.8) の両辺の演算子に関する同時固有状態である。左辺は  $\frac{n}{2}$  を与え、一方で右辺は  $-\frac{h}{2}$  を与える。それゆえ、  $j=l+1$  の状態は  $h=-n$  でゼロモードになる。同様に、  $j=l-1$  の状態は  $h=n$  でゼロモードになる。

$j=l$  の状態に関して、線形結合  $|\psi\rangle = c_+|+\rangle_2 + c_-|-\rangle_2$  を考える。ここで、  $|\pm\rangle_2$  の基底をとることにする。(E.2) や (E.3) から、(E.8) は次のように書くことができる。

$$\left[\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{h}{2} (U^{23})^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} (U^{23})^T\right] \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{E.9})$$

ここで、

$$U^{(23)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{E.10})$$

のように  $U^{(23)}$  をとることにより、(E.9) は下式のようになる。

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} n/h + 1 - 4 \sin^2 \theta & 4 \sin \theta \cos \theta \\ 4 \sin \theta \cos \theta & -n/h + 1 - 4 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{E.11})$$

この表式は

$$\left(\frac{n}{h}\right)^2 + 4 \cos(2\theta) \frac{n}{h} + 3 = 0 \quad (\text{E.12})$$

が満たされるならば非自明な解を持ち、非自明な解を持つのはその場合に限る。 $\cos^2(2\theta) \geq 3/4$  ならば、これはある実数値  $h$  によって満たされる。一方で、(E.10) と (E.6) を比較することにより、

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{l}{2l+1}}, \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \quad (\text{E.13})$$

となり、したがって  $n \geq 2$  に関して次式を得る。

$$\cos^2(2\theta) = \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}. \quad (\text{E.14})$$

結果として、 $n \geq 2$  の場合、任意の実数  $h$  について  $j = l$  の状態はゼロモードを持たない。それゆえ、(4.47) を得ることができる。

### E.3 $\hat{\Gamma}'$ のゼロモードに関する計算

次に、 $\hat{\Gamma}'$  のゼロモードを考える。図 4.1 から、 $(-2n+2)/3 < h < (2n+2)/3$  に関して、 $T'$  や  $\hat{\Gamma}(h)$  は次のように書くことができる：

$$\langle j, m | T' | j, m \rangle = \frac{h}{|h|} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2l+3} & & & \\ & \mathbf{1}_{2l+1} & & \\ & & -\mathbf{1}_{2l+1} & \\ & & & -\mathbf{1}_{2l-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.15})$$

$$\langle j, m | \hat{\Gamma}(h) | j, m \rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2l+3} & & & \\ & U(h) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^\dagger(h) \otimes \mathbf{1}_{2l+1} & & \\ & & & \\ & & & -\mathbf{1}_{2l-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.16})$$

ここで基底は  $|\pm\rangle_1$  をとる。ユニタリー行列  $U(h)$  は、正負両方の固有値を持つ (4.40) の演算子  $H$  の固有状態  $|\pm\rangle_H$  に  $|\pm\rangle_1$  を関係づける。

そのとき、(4.5) から、

$$\langle j, m | \hat{\Gamma}' | j, m \rangle = \frac{h}{|h|} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2l+3} & & \\ & X & \\ & & \mathbf{1}_{2l-1} \end{pmatrix} \quad (\text{E.17})$$

を得ることができる。 $j = l$  領域のブロック X に関して、

$$\left\{ U(h) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U^\dagger(h), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = 2 \cos(2\theta(h)) \mathbf{1}_2 \quad (\text{E.18})$$

で、係数  $2 \cos(2\theta(h))$  の符号を評価しなければならない。ここで、 $U(h)$  には次式を用いた。

$$U(h) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(h)) & -\sin(\theta(h)) \\ \sin(\theta(h)) & \cos(\theta(h)) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.19})$$

$h = 0$  について、演算子  $H$  は  $\sigma \cdot L + 1/2$  になるので、基底  $|\pm\rangle_H$  は  $|\pm\rangle_2$  となる。そのとき、 $U(h)$  は  $U^{(12)}$  になり、 $n \geq 2$  に関して、

$$\cos(2\theta(h=0)) = \frac{2}{n^2} - 1 < 0 \quad (\text{E.20})$$

を得る。同様に、 $\cos(2\theta(h=1)) = -1 < 0$  や  $\cos(2\theta(h=\infty)) = -1/n < 0$  を得ることをできる。

ここで、 $(-2n+2)/3 < h < (2n+2)/3$  の領域内で  $\cos(2\theta(h)) = 0$  が起こるかを調べる。 $\cos(2\theta(h)) = 0$  は  $|\pm\rangle_H = (|+\rangle_1 \pm |-\rangle_1)/\sqrt{2}$  を意味する。これは、

$$H(|+\rangle_1 \pm |-\rangle_1) = e_\pm(|+\rangle_1 \pm |-\rangle_1) \quad (\text{E.21})$$

が  $h$  のある値で満たされる場合に対応する。

$$U^{(12)} \begin{pmatrix} l & \\ & -(l+1) \end{pmatrix} U^{(21)} = \frac{1}{(2l+1)^2} \begin{pmatrix} l - 4l(l+1)^2 & 2\sqrt{l(l+1)}(2l+1) \\ 2\sqrt{l(l+1)}(2l+1) & (4l^2 - 1)(l+1) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.22})$$

$$U^{(13)} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -3 \end{pmatrix} U^{(31)} = \frac{1}{2l+1} \begin{pmatrix} -2l-3 & -4\sqrt{l(l+1)} \\ -4\sqrt{l(l+1)} & -2l+1 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.23})$$

を用いて、(E.21) は次式のように表される。

$$\left[ \frac{1}{(2l+1)^2} \begin{pmatrix} l - 4l(l+1)^2 & 2\sqrt{l(l+1)}(2l+1) \\ 2\sqrt{l(l+1)}(2l+1) & (4l^2 - 1)(l+1) \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \frac{1}{2l+1} \begin{pmatrix} -2l-3 & -4\sqrt{l(l+1)} \\ -4\sqrt{l(l+1)} & -2l+1 \end{pmatrix} + \left( \frac{1}{2} - e_\pm \right) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{E.24})$$

この方程式を解くと、

$$h = -\frac{1}{2}(n^2 - 2), \quad (\text{E.25})$$

$$e_\pm = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{n} (n^2 - 1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4n} (n^3 - 3n + 2) \quad (\text{E.26})$$

を得る。 $n \geq 2$  に関して、 $e_{\pm}$  は正負それぞれの値をとり、それは前節の結果と一致している：任意の  $h$  の値に関してゼロモードを持たないので、 $H$  は  $j = l$  領域で常に正と負の固有値を持つ。その上さらに、 $n \geq 2$  について  $-(n^2 - 2)/2 < (-2n + 2)/3$  なので、 $(-2n + 2)/3 < h < (2n + 2)/3$  の領域内で  $\cos(2\theta(h)) = 0$  となることはない。

演算子  $H$  は  $h$  の連続関数なので、それは  $\cos(2\theta(h))$  である。したがって、 $\cos(2\theta(h))$  は  $(-2n + 2)/3 < h < (2n + 2)/3$  の領域で常に同じ符号をとる。 $\cos(2\theta(h))$  は  $h = 0, 1$  で負の値を持つので、この領域では常に負の値を持つ。それゆえ、(4.54) という結果を得る。



## 付録F ゲージ場による $\hat{\Gamma}$ の展開

この付録では、カイラリティ演算子 $\hat{\Gamma}$ をゲージ場で展開し、(5.17)を証明する。

まず始めに、(3.16)で定義された各 $S_F^2$ 上のカイラリティ演算子 $\hat{\Gamma}_X$ を展開する。 $H_X$ を、次式のようにゲージ場の0次と1次に分解する：

$$H_X = \alpha_X + \beta_X . \quad (\text{F.1})$$

ここで、

$$\alpha_X = a \left( \sigma_i L_i + \frac{1}{2} \right)_X , \quad \beta_X = a \rho(\sigma_i a_i)_X \quad (\text{F.2})$$

である。 $a = 2/n$ や $L_i$ は $n$ のオーダなので、演算子 $\alpha_X$ や $\beta_X$ はそれぞれ $\mathcal{O}(n^0)$ や $\mathcal{O}(n^{-1})$ のオーダである。よって、

$$\hat{\Gamma}_X = \left( \alpha + \zeta^{(1)} + \zeta^{(2)} + \zeta^{(3)} + \mathcal{O}(\beta^4) \right)_X \quad (\text{F.3})$$

を得る。ここで、 $\zeta_X^{(i)}$ は $\beta_X$ の、すなわち、ゲージ場 $(a_i)_X$ の $i$ 次のオーダである。それは、

$$\zeta_X^{(1)} = \frac{1}{2}(\beta - \alpha\beta\alpha)_X , \quad (\text{F.4})$$

$$\zeta_X^{(2)} = \left( -\frac{1}{8}(\alpha\beta^2 + \beta\alpha\beta + \beta^2\alpha) + \frac{3}{8}\alpha\beta\alpha\beta\alpha \right)_X , \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned} \zeta_X^{(3)} = & \left( \frac{1}{16}(-\beta^3 + \beta\alpha\beta\alpha\beta + \beta\alpha\beta^2\alpha + \beta^2\alpha\beta\alpha + \alpha\beta\alpha\beta^2 + \alpha\beta^2\alpha\beta + \alpha\beta^3\alpha) \right. \\ & \left. - \frac{5}{16}\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha \right)_X \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

のように表される。演算子 $\alpha_X$ や $\zeta_X^{(i)}$ のそれ自身は $1/n$ 展開の0次と $i$ 次のオーダである。しかしながら、行列空間がそのままの座標を持つスピノル空間のトレースをとると、演算子 $\text{tr}_{\sigma_X}(\alpha_X)$ と $\text{tr}_{\sigma_X}(\zeta_X^{(1)})$ はそれぞれ $n^{-1}$ や $n^{-2}$ のオーダになる。

よって、

$$\begin{aligned} \{\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2\} = & 2\alpha_1\alpha_2 \\ & + \{\alpha_1, \zeta_2^{(1)} + \zeta_2^{(2)} + \zeta_2^{(3)}\} + \{\alpha_2, \zeta_1^{(1)} + \zeta_1^{(2)} + \zeta_1^{(3)}\} \\ & + \{\zeta_1^{(1)} + \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(1)} + \zeta_2^{(2)}\} \\ & + \mathcal{O}(n^{-5}) \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

を得る。演算子 $\{\alpha_1, \zeta_2^{(4)}\}$ や $\{\alpha_2, \zeta_1^{(4)}\}$ 、 $\{\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(3)}\}$ 、 $\{\zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(3)}\}$ もまた $n^{-4}$ のオーダで現れる一方で、(5.17)の $\mathcal{T}r[\hat{\Gamma}]$ でこれらの項を考える場合、 $\text{tr}_{\sigma_X}(\alpha_X)$ や $\text{tr}_{\sigma_X}(\zeta_X^{(1)})$ の

ようなトレースをとり、これらの項は  $\mathcal{O}(n^{-5})$  のオーダーになる。よって、

$$[\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2] = [\alpha_1, \zeta_2^{(1)}] - [\alpha_2, \zeta_1^{(1)}] + [\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}] + \mathcal{O}(n^{-3}) \quad (\text{F.8})$$

もまた得られる。初項  $[\alpha_1, \alpha_2]$  は消えて、 $[\alpha_1, \beta_2]$  や  $[\alpha_2, \beta_1]$  は  $\mathcal{O}(n^{-2})$  のオーダーなので、(F.8) は  $\mathcal{O}(n^{-2})$  のオーダーであることに注目すべきである。これが、(5.8) の第2項が  $\mathcal{O}(n^{-4})$  のオーダーとなる理由である。

関係式 (5.8) を使うと、カイラリティ演算子 (5.2) は

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{2}\{\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2\} - \frac{1}{16}\{\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2\}[\hat{\Gamma}_1, \hat{\Gamma}_2]^2 + \dots \quad (\text{F.9})$$

と表される。(F.7) と (F.8) を (F.9) に挿入すると、(5.17) を得ることができる。

## 付録G $\mathcal{T}r [G_5]$ の可換極限

この付録では、 $\mathcal{T}r [G_5]$  の可換極限をとることにより、(5.26) を示す。  
(F.4) を (5.22) に代入すると、

$$G_5 = \sum_{i=1}^5 K_i \quad (\text{G.1})$$

となり、ここで

$$K_1 = -\frac{1}{32} \alpha_1 \alpha_2 ([\alpha_1, \beta_2] - [\alpha_2, \beta_1])^2, \quad (\text{G.2})$$

$$K_2 = -\frac{1}{32} \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 [\alpha_1, \beta_2] \alpha_2 - \alpha_1 [\alpha_2, \beta_1] \alpha_1)^2, \quad (\text{G.3})$$

$$K_3 = \frac{1}{32} \alpha_1 \alpha_2 \{ [\alpha_1, \beta_2] - [\alpha_2, \beta_1], \alpha_2 [\alpha_1, \beta_2] \alpha_2 - \alpha_1 [\alpha_2, \beta_1] \alpha_1 \}, \quad (\text{G.4})$$

$$K_4 = -\frac{1}{64} \alpha_1 \alpha_2 ([\alpha_1, \beta_2] - [\alpha_2, \beta_1]) [\beta_1, \beta_2] + \text{その他の 15 項}, \quad (\text{G.5})$$

$$K_5 = -\frac{1}{128} \alpha_1 \alpha_2 [\beta_1, \beta_2]^2 + \text{その他の 15 項} \quad (\text{G.6})$$

である。 $K_1$  や  $\beta$  の  $K_2$ 、 $K_3$  は  $\beta$  の 2 次、 $K_4$  は  $\beta$  の 3 次、そして  $K_5$  は  $\beta$  の 4 次である。  
(G.5) や (G.6) では、典型的な項のみ記述している。残りの 15 項は同様に書くことができる。

始めに、 $\mathcal{T}r [K_1]$  の可換極限を計算する。(F.2) を (G.2) に挿入すると、次式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}r [K_1] = & -\frac{1}{32} a^6 \rho^2 \mathcal{T}r \left[ (\sigma \cdot L)_1 (\sigma \cdot L)_2 [(\sigma \cdot L)_1, (\sigma \cdot a)_2]^2 \right. \\ & \left. - (\sigma \cdot L)_1 (\sigma \cdot L)_2 [(\sigma \cdot L)_1, (\sigma \cdot a)_2] [(\sigma \cdot L)_2, (\sigma \cdot a)_1] \right. \\ & \left. + (1 \leftrightarrow 2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

ここで、 $1/n$  の第 2 項以降は省略している。スピノル空間のトレースをとると、

$$\text{tr}_\sigma [\sigma_i \sigma_j \sigma_k] = 2i \epsilon_{ijk} \quad (\text{G.8})$$

を使うことにより、(G.7) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} a^6 \rho^2 \mathcal{T}r' \left[ \epsilon_{abc} L_c \epsilon_{ijk} L_k [L_a, a_i] [L_b, a_j] - \epsilon_{abc} L_c \epsilon_{ijk} L_k [L_a, a_i] [L_j, a_b] \right. \\ \left. + (1 \leftrightarrow 2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

ただし、 $\mathcal{T}r'$  は行列空間とゲージ場空間のトレースである。そのとき、(G.9) の可換極限は次式で得られる。

$$-2\rho^4 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \text{tr} [\epsilon_{abc} n_c \epsilon_{ijk} n_k (\partial_a a_i \partial_b a_j + \partial_i a_a \partial_j a_b) + 2\partial_a (Pa)_i \partial_i (Pa)_a]. \quad (\text{G.10})$$

ここで、 $(Pa)_i = P_{ij}a_j$  であり、 $P_{ij} = \delta_{ij} - n_in_j$  である。(G.10) は

$$-2\rho^4 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \text{tr} [\epsilon_{abc}n_c\epsilon_{ijk}n_k(\partial_a a'_i - \partial_i a'_a)(\partial_b a'_j - \partial_j a'_b)] \quad (\text{G.11})$$

のように表され、 $a'_i = \epsilon_{ijk}n_j a_k$  はゲージ場の接線成分である。

$$\alpha_1[\alpha_1, \beta_2] = -[\alpha_1, \beta_2]\alpha_1, \quad (\text{G.12})$$

$$\alpha_2[\alpha_2, \beta_1] = -[\alpha_2, \beta_1]\alpha_2 \quad (\text{G.13})$$

を用いると、(G.3) は

$$K_2 = -\frac{1}{32}([\alpha_1, \beta_2] - [\alpha_2, \beta_1])^2 \alpha_1 \alpha_2 \quad (\text{G.14})$$

と表され、(G.4) は

$$K_3 = -\frac{1}{32} \left( \alpha_2[\alpha_1, \beta_2]\alpha_1\alpha_2[\alpha_1, \beta_2]\alpha_2 + [\alpha_1, \beta_2]\alpha_1\alpha_2[\alpha_1, \beta_2] \right. \\ \left. - \alpha_2[\alpha_1, \beta_2][\alpha_2, \beta_1]\alpha_1 - [\alpha_1, \beta_2]\alpha_1\alpha_2[\alpha_2, \beta_1] + (1 \leftrightarrow 2) \right) \quad (\text{G.15})$$

と表すことができる。 $\mathcal{T}r[K_1]$  と同様の計算を行うことにより、 $\mathcal{T}r[K_2]$  や  $\mathcal{T}r[K_3]$  の可換極限が (G.11) と同じ結果とその 2 倍をそれぞれ与えることを示すことができる。それゆえ、 $\mathcal{T}r(K_1 + K_2 + K_3)$  の可換極限は (G.11) の 4 つの項になる。これは、(5.26) でゲージ場の 2 次のオーダの項を与える。

次に、 $\mathcal{T}r[K_4]$  を考える。(F.2) を代入し、スピノル空間のトレースをとると、(G.5) で現れる  $K_4$  の第 1 項は、

$$\frac{1}{16} a^6 \rho^3 \mathcal{T}r' [\epsilon_{abc}L_c\epsilon_{ijk}L_k ([L_a, a_i] - [L_i, a_a])[a_b, a_j]] \quad (\text{G.16})$$

を与える。その可換極限は次式のようになる。

$$-i\rho^4 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \epsilon_{abc}n_c\epsilon_{ijk}n_k \text{tr} ((\epsilon_{ade}n_d\partial_e a_i - \epsilon_{ilm}n_l\partial_m a_a)[a_b, a_j]). \quad (\text{G.17})$$

これは

$$i\rho^4 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \epsilon_{abc}n_c\epsilon_{ijk}n_k \text{tr} ((\partial_a a'_i - \partial_i a'_a)[a'_b, a'_j]) \quad (\text{G.18})$$

と書き直すことができる。(G.5) の残っている 15 項は、すべて同じ結果を与える。したがって、 $\mathcal{T}r[K_4]$  の可換極限は (G.18) の 16 倍になる。これは (5.26) のゲージ場の 3 次のオーダの項を与える。

最後に  $\mathcal{T}r[K_5]$  を考える。(F.2) を代入し、スピノル空間のトレースをとると、(G.6) で現れる  $K_5$  の第 1 項は

$$\frac{1}{32} a^6 \rho^4 \mathcal{T}r' [\epsilon_{abc}L_c\epsilon_{ijk}L_k [a_a, a_i][a_b, a_j]] \quad (\text{G.19})$$

を与える。その可換極限は

$$\frac{1}{2} \rho^4 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \epsilon_{abc}n_c\epsilon_{ijk}n_k \text{tr} ([a_a, a_i][a_b, a_j]) \quad (\text{G.20})$$

となり、

$$\frac{1}{2}\rho^4 \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \frac{d\Omega_2}{4\pi} \epsilon_{abc} n_c \epsilon_{ijk} n_k \text{tr} ([a'_a, a'_i][a'_b, a'_j]) \quad (\text{G.21})$$

のように表すことができる。(G.6)の残った15項はすべて同じ結果を与える。したがって、 $\text{Tr}[K_5]$ の可換極限は(G.21)の16倍になる。これは(5.26)のゲージ場の4次の項を与える。

以上のことにより、(5.26)を示すことができる。

## 付録H 相互作用がない場合のディラック演算子のスペクトル

この付録では、自由場の場合のGWディラック演算子の全スペクトルを計算する。ここで、簡単のために、 $U(1)$  ゲージ群を考える。自由場の場合、

$$(\Gamma - \hat{\Gamma})_X = a(\sigma \cdot \tilde{L} + 1)_X, \quad (\text{H.1})$$

$$(\Gamma + \hat{\Gamma})_X = a(\sigma \cdot (L + L^R))_X \quad (\text{H.2})$$

であり、ここで  $(\tilde{L}_i)_X = (L_i - L_i^R)_X$  は随伴演算子である。そのとき、相互作用のないGWディラック演算子 (5.35) は

$$D_{\text{GW}} = -\frac{a}{2} \left[ (\sigma \cdot \tilde{L} + 1)_1 (\sigma \cdot (L + L^R))_2 + (\sigma \cdot (L + L^R))_1 (\sigma \cdot \tilde{L} + 1)_2 \right] \quad (\text{H.3})$$

と書くことができる。

各非可換球面  $S_F^2$  上で調べることから始める。私達の定式化は各球面  $S_F^2$  上で  $SO(3)$  ポアンカレ対称性を持ち、その生成子  $(M_i)_X$  は (5.41) で与えられている。今、その固有状態を

$$(M_i)_X^2 |J_X, \pm\rangle = J_X(J_X + 1) |J_X, \pm\rangle \quad (\text{H.4})$$

と書く。各  $|J_X, \pm\rangle$  は、 $(M_3)_X$  に関して  $(2J_X + 1)$  重縮退を持つ。符号  $\pm$  は、この状態が  $(\tilde{L}_i)_X$  のスピン  $l_X$  状態から  $J_X = l_X \pm \frac{1}{2}$  として得られることを意味する。 $J_X = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, n - \frac{3}{2}$  に関して、 $|J_X, +\rangle$  と  $|J_X, -\rangle$  の両方の状態が存在し、一方で最高スピン  $J_X = n - \frac{1}{2}$  に関して、 $|J_X, +\rangle$  の状態のみが存在する。状態  $|J_X, \pm\rangle$  は演算子  $(\sigma \cdot \tilde{L} + 1)_X$  の固有状態を

$$(\sigma \cdot \tilde{L} + 1)_X |J_X, \pm\rangle = \pm \left( J_X + \frac{1}{2} \right) |J_X, \pm\rangle \quad (\text{H.5})$$

とみなす。関係式

$$\{\Gamma - \hat{\Gamma}, \Gamma + \hat{\Gamma}\}_X = 0, \quad (\text{H.6})$$

特に自由場の場合には、

$$\{\sigma \cdot \tilde{L} + 1, \sigma \cdot (L + L^R)\}_X = 0 \quad (\text{H.7})$$

なので、演算子  $(\sigma \cdot (L + L^R))_X$  は

$$(\sigma \cdot (L + L^R))_X |J_X, \pm\rangle = C_{J_X} |J_X, \mp\rangle \quad (\text{H.8})$$

のように  $\pm$  の符号を反転させる。ここで、

$$C_{J_X} = \sqrt{n^2 - \frac{1}{4} - J_X(J_X + 1)} \quad (\text{H.9})$$

である。

最高スピン  $J_X = n - \frac{1}{2}$  に関して、状態  $|J_X, -\rangle$  は存在せず、したがって  $(\sigma \cdot (L + L^R))_X |J_X, +\rangle$  は消えなければならない。実際に、(H.9) からわかるように、この場合は  $C_{J_X} = 0$  である。

ここで、 $S_F^2 \times S_F^2$  に話を戻す。各  $S_F^2$  の、スピン  $J_1$  や  $J_2$  により特定された状態を考える。順番に、以下の3つのケースを調べる：

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{1}{2} \leq J_1 \leq n - \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq J_2 \leq n - \frac{3}{2}, \\ (b) \quad & J_1 = n - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq J_2 \leq n - \frac{3}{2}, \\ (c) \quad & J_1 = J_2 = n - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{H.10}$$

始めに (a) を考えると、この場合、4つの状態  $|J_1, \pm; J_2, \pm\rangle$  が存在する。これらの状態に GW ディラック演算子 (H.3) を作用させると、

$$\begin{aligned} & D_{\text{GW}} \left( c_1 |J_1, +; J_2, +\rangle + c_2 |J_1, +; J_2, -\rangle + c_3 |J_1, -; J_2, +\rangle + c_4 |J_1, -; J_2, -\rangle \right) \\ &= (Ac_1 + Bc_3) |J_1, +; J_2, +\rangle + (Ac_1 - Bc_4) |J_1, +; J_2, -\rangle \\ & \quad + (-Ac_4 + Bc_1) |J_1, -; J_2, +\rangle + (-Ac_3 - Bc_2) |J_1, -; J_2, -\rangle \end{aligned} \tag{H.11}$$

を得る。ここで、 $A$  や  $B$  は  $A = (J_1 + \frac{1}{2})C_{J_2}$ 、 $B = (J_2 + \frac{1}{2})C_{J_1}$  である。この領域で  $D_{\text{GW}}$  を対角化すると、固有値  $\pm|A \pm B|$  が得られ、この固有値の2つの  $\pm$  の符号は一致する必要はない。

特に、 $J_1 = J_2$ 、つまり  $A = B$  に関して、2つの種類のゼロモードが存在する。その正確な表式は次式で与えられる。

$$|1\rangle = \frac{1}{2} \left( |J_1, +; J_2, +\rangle + |J_1, +; J_2, -\rangle - |J_1, -; J_2, +\rangle + |J_1, -; J_2, -\rangle \right), \tag{H.12}$$

$$|2\rangle = \frac{1}{2} \left( |J_1, +; J_2, +\rangle - |J_1, +; J_2, -\rangle + |J_1, -; J_2, +\rangle + |J_1, -; J_2, -\rangle \right). \tag{H.13}$$

いま、これらのカイラリティを考える。カイラリティ演算子 (5.1) は

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{a^2}{4} & \left[ (\sigma \cdot (L + L^R))_1 (\sigma \cdot (L + L^R))_2 + (\sigma \cdot \tilde{L} + 1)_1 (\sigma \cdot \tilde{L} + 1)_2 \right. \\ & \left. - (\sigma \cdot (L + L^R))_1 (\sigma \cdot \tilde{L} + 1)_2 - (\sigma \cdot \tilde{L} + 1)_1 (\sigma \cdot (L + L^R))_2 \right] \end{aligned} \tag{H.14}$$

と書き直すことができる。前述の状態にそれを作用させると、

$$\Gamma|1\rangle = |2\rangle, \quad \Gamma|2\rangle = |1\rangle \tag{H.15}$$

を得る。ここで、 $\frac{a^2}{4} \left[ (C_J)^2 + (J + \frac{1}{2})^2 \right] = 1$  を用いた。したがって、

$$\Gamma \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) = + \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle), \quad \Gamma \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) = - \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \tag{H.16}$$

が得られる。この領域のゼロモードは両方をカイラリティを持ち、インデックスには寄与しない。

次に (b) の場合を感挙げる。この場合は、2つの状態  $|J_1, +; J_2, \pm\rangle$  が存在する。これらの状態に GW ディラック演算子 (H.3) を作用させ、 $D_{\text{GW}}$  を対角化すると、

$$\begin{aligned} D_{\text{GW}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |J_1, +, J_2, +\rangle \pm |J_1, +, J_2, -\rangle \right) \\ = \pm \left( J_1 + \frac{1}{2} \right) C_{J_2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |J_1, +, J_2, +\rangle \pm |J_1, +, J_2, -\rangle \right) \end{aligned} \quad (\text{H.17})$$

のような固有状態を得る。この場合には、ゼロモードは存在しない。

最後に (c) の場合を考えると、この場合には  $|J_1, +; J_2, +\rangle$  の状態のみが存在する。これらの状態に GW ディラック演算子 (H.3) やカイラリティ演算子 (H.14) を作用させると、

$$D_{\text{GW}} |J_1, +; J_2, +\rangle = 0, \quad (\text{H.18})$$

$$\Gamma |J_1, +; J_2, +\rangle = + |J_1, +; J_2, +\rangle \quad (\text{H.19})$$

を得る。これらはカイラル・ゼロモードを与え、インデックスに寄与する。状態  $|J_X, +\rangle$  が  $(2J_X + 1)$  重縮退を持つことを思い出すと、カイラル・ゼロモードの縮退度は  $(2J_1 + 1)(2J_2 + 1) = 4n^2$  となる。これは、(5.28) の第1項と一致する。

いま、ディラック演算子の全スペクトルが得られ、第5.3.1節で議論したような状態によりカイラル・ゼロモードが与えられることを調べたことになる。



## 参考文献

- [1] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, “A large- $N$  reduced model as superstring,” Nucl. Phys. B **498**, 467 (1997) [arXiv:hep-th/9612115]; For a review: H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya and T. Tada, “IIB matrix model,” Prog. Theor. Phys. Suppl. **134**, 47 (1999) [arXiv:hep-th/9908038].
- [2] A. Connes, Noncommutative geometry, Academic Press, 1990.
- [3] N. Seiberg and E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032 [arXiv:hep-th/9908142].
- [4] H. Aoki, N. Ishibashi, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, Nucl. Phys. B **565**, 176 (2000) [arXiv:hep-th/9908141].
- [5] H. Aoki, S. Iso, H. Kawai, Y. Kitazawa and T. Tada, Prog. Theor. Phys. **99** (1998) 713 [arXiv:hep-th/9802085].
- [6] J. Nishimura and F. Sugino, JHEP **0205** (2002) 001 [arXiv:hep-th/0111102].
- [7] H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki, T. Matsuo and S. Shinohara, Nucl. Phys. B **647** (2002) 153 [arXiv:hep-th/0204240].
- [8] H. Kawai, S. Kawamoto, T. Kuroki and S. Shinohara, Prog. Theor. Phys. **109** (2003) 115 [arXiv:hep-th/0211272].
- [9] P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, Phys. Rev. D **25**, 2649 (1982).
- [10] H. Neuberger, Phys. Lett. B **417**, 141 (1998) [arXiv:hep-lat/9707022]; Phys. Rev. D **57**, 5417 (1998) [arXiv:hep-lat/9710089]; Phys. Lett. B **427**, 353 (1998) [arXiv:hep-lat/9801031]. M. Lüscher, Phys. Lett. B **428**, 342 (1998) [arXiv:hep-lat/9802011]. P. Hasenfratz, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **63**, 53 (1998) [arXiv:hep-lat/9709110]; P. Hasenfratz, V. Laliena and F. Niedermayer, Phys. Lett. B **427**, 125 (1998) [arXiv:hep-lat/9801021]; F. Niedermayer, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73**, 105 (1999) [arXiv:hep-lat/9810026].
- [11] M. Luscher, Commun. Math. Phys. **85**, 39 (1982); Nucl. Phys. B **549**, 295 (1999) [arXiv:hep-lat/9811032].
- [12] P. Hernandez, K. Jansen and M. Luscher, Nucl. Phys. B **552**, 363 (1999) [arXiv:hep-lat/9808010].

- [13] M. Luscher, Nucl. Phys. B **538**, 515 (1999) [arXiv:hep-lat/9808021]; Nucl. Phys. B **549**, 295 (1999) [arXiv:hep-lat/9811032].
- [14] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, Phys. Rev. D **67**, 085005 (2003) [arXiv:hep-th/0209223].
- [15] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, Nucl. Phys. B **684**, 162 (2004) [arXiv:hep-th/0312199].
- [16] H. Aoki, S. Iso and T. Maeda, Phys. Rev. D **75**, 085021 (2007) [arXiv:hep-th/0610125].
- [17] H. Aoki, S. Iso, T. Maeda and K. Nagao, Phys. Rev. D **71**, 045017 (2005) [arXiv:hep-th/0412052].
- [18] H. Aoki, Y. Hirayama and S. Iso, Phys. Rev. D **78**, 025028 (2008) [arXiv:0804.0568 [hep-th]]; For a short review: H. Aoki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **171**, 228 (2007) [arXiv:0706.3078 [hep-th]].
- [19] H. Aoki, Y. Hirayama and S. Iso, Phys. Rev. D **80** (2009) 125006 [arXiv:0909.5252 [hep-th]].
- [20] W. Behr, F. Meyer and H. Steinacker, JHEP **0507**, 040 (2005) [arXiv:hep-th/0503041].
- [21] T. Imai and Y. Takayama, Nucl. Phys. B **686**, 248 (2004) [arXiv:hep-th/0312241]; Y. Kitazawa, Y. Takayama and D. Tomino, Nucl. Phys. B **715**, 665 (2005) [arXiv:hep-th/0412312]; H. Kaneko, Y. Kitazawa and D. Tomino, Nucl. Phys. B **725**, 93 (2005) [arXiv:hep-th/0506033]; T. Azuma, S. Bal, K. Nagao and J. Nishimura, JHEP **0509**, 047 (2005) [arXiv:hep-th/0506205].
- [22] K. G. Wilson, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974).
- [23] H. B. Nielsen and M. Ninomiya, Nucl. Phys. B **185**, 20 (1981) [Erratum-ibid. B **195**, 541 (1982)].
- [24] 青木 慎也, “格子上の場の理論”, シュプリンガー・フェアラーク東京.
- [25] H. Neuberger, Phys. Lett. B **417**, 141 (1998) [arXiv:hep-lat/9707022]; Phys. Rev. D **57**, 5417 (1998) [arXiv:hep-lat/9710089]; Phys. Lett. B **427**, 353 (1998) [arXiv:hep-lat/9801031].
- [26] P. Hasenfratz, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **63**, 53 (1998) [arXiv:hep-lat/9709110]; P. Hasenfratz, V. Laliena and F. Niedermayer, Phys. Lett. B **427**, 125 (1998) [arXiv:hep-lat/9801021]; F. Niedermayer, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73**, 105 (1999) [arXiv:hep-lat/9810026].
- [27] M. Luscher, Phys. Lett. B **428**, 342 (1998) [arXiv:hep-lat/9802011].

- [28] U. Carow-Watamura and S. Watamura, Commun. Math. Phys. **183**, 365 (1997) [arXiv:hep-th/9605003]; Commun. Math. Phys. **212**, 395 (2000) [arXiv:hep-th/9801195].
- [29] H. Grosse and J. Madore, Phys. Lett. B **283**, 218 (1992); H. Grosse and P. Presnajder, Lett. Math. Phys. **33**, 171 (1995); H. Grosse, C. Klimcik and P. Presnajder, Commun. Math. Phys. **185**, 155 (1997) [arXiv:hep-th/9507074]; arXiv:hep-th/9603071.
- [30] H. Grosse and P. Presnajder, arXiv:hep-th/9805085; Lett. Math. Phys. **46**, 61 (1998).
- [31] A. P. Balachandran and S. Vaidya, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 17 (2001) [arXiv:hep-th/9910129].
- [32] P. Presnajder, J. Math. Phys. **41**, 2789 (2000) [arXiv:hep-th/9912050].
- [33] H. Aoki, S. Iso and K. Nagao, Phys. Rev. D **67**, 065018 (2003) [arXiv:hep-th/0209137].
- [34] K. Fujikawa, Phys. Rev. D **60**, 074505 (1999) [arXiv:hep-lat/9904007].
- [35] A. P. Balachandran and G. Immirzi, Phys. Rev. D **68**, 065023 (2003) [arXiv:hep-th/0301242].
- [36] S. Iso, Y. Kimura, K. Tanaka and K. Wakatsuki, Nucl. Phys. B **604**, 121 (2001) [arXiv:hep-th/0101102].
- [37] T. Azuma, S. Bal, K. Nagao and J. Nishimura, JHEP **0405**, 005 (2004) [arXiv:hep-th/0401038].
- [38] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **79** (1974) 276.
- [39] K. Nagao, Phys. Rev. D **73**, 065002 (2006) [arXiv:hep-th/0509034].
- [40] J. Arafune, P. G. O. Freund and C. J. Goebel, J. Math. Phys. **16**, 433 (1975).
- [41] H. Aoki, J. Nishimura and Y. Susaki, JHEP **0702**, 033 (2007) [arXiv:hep-th/0602078]; JHEP **0710**, 024 (2007) [arXiv:hep-th/0604093].
- [42] H. Aoki, J. Nishimura and Y. Susaki, JHEP **0904**, 055 (2009) [arXiv:0810.5234 [hep-th]].
- [43] H. Aoki, Phys. Rev. D **82**, 085019 (2010) [arXiv:1007.4420 [hep-th]].
- [44] H. Aoki, arXiv:1011.1015 [hep-th].
- [45] P. Aschieri, T. Grammatikopoulos, H. Steinacker and G. Zoupanos, JHEP **0609**, 026 (2006) [arXiv:hep-th/0606021]; H. Steinacker and G. Zoupanos, JHEP **0709**, 017 (2007) [arXiv:0706.0398 [hep-th]].

- [46] H. Aoki, J. Nishimura and Y. Susaki, *JHEP* **0702**, 033 (2007) [arXiv:hep-th/0602078]; *JHEP* **0710**, 024 (2007) [arXiv:hep-th/0604093]; *JHEP* **0909**, 084 (2009) [arXiv:0907.2107 [hep-th]].